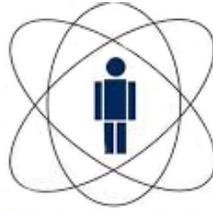


CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

CBPF



CBPF

**Centro Brasileiro de
Pesquisas Físicas**

TESE DE DOUTORADO:

**Cenários Supersimétricos em Presença de
Anisotropias Espaço-Temporais**

Luis Giraldo Durand Bernald

A
meus pais

Agradecimentos

-A Deus, que faz possível todas as coisas.

-Ao Professor Helayël, um grande ser humano, pela excelente orientação, a grande paciência, o estímulo para trabalhar e pelo exemplo que ele é para todo cientista, inclusive além da Física.

-A minha família pelo carinho de sempre, pela confiança e o apoio constante.

-Ao CBPF pela acolhida e as condições de trabalho concedidas e à Bete pela ajuda aos pós-graduandos .

-A todos meus amigos do CBPF, pelos bons momentos, a companhia e o afeto.

-Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Abstract

The main focus of this thesis is to pursue an investigation of a possible connection between Lorentz-Symmetry Violation (LSV) and effects of Supersymmetry (SUSY). We adopt the viewpoint that LSV takes place at energies sufficiently high so that SUSY cannot be neglected.

By then coupling Lorentz-violation models to SUSY, we choose some particular classes of abelian gauge theories to understand how LSV and SUSY may be connected to one another. An outstanding result is the important role SUSY fermion condensates play in the mechanism of LSV. This is new in the literature and we also work out how this fermionic condensation mechanism affects the photon and photino dispersion relations. This supersymmetric landscape with LSV, then encompasses the effects of SUSY and LSV and they yield an interparticle electrostatic potential with a non-trivial confining profile.

Resumo

O objetivo central desta tese é a discussão do Modelo-Padrão Estendido (SME) em um cenário onde a Supersimetria (SUSY) está presente. A nossa premissa é que a violação da simetria de Lorentz (LSV) ocorre em uma escala de energia alta o suficiente onde os efeitos da SUSY, exata ou quebrada, não devam ser desprezados.

Com esta proposta, abordamos duas categorias de modelos de gauge abelianos, bastante estudados na literatura, em um cenário dominado pela SUSY. Observamos, nesta investigação, a condensação de férmions e relacionamos este fenômeno a LSV e, até mesmo, a violação da SUSY. Trabalhamos relações de dispersão para os fotinos e estudamos ações efetivas fotônicas com efeitos de SUSY e LSV e suas consequências no potencial inter-partícula estático no caso de duas cargas opostas.

Palavras-chaves: Violação da simetria de Lorentz, Supersimetria,

Índice

Agradecimentos	II
Abstract	III
Resumo	IV
1 Introdução	1
2 Eletrodinâmica e Violação da Simetria de Lorentz	8
2.1 Eletrodinâmica com o termo CPT-ímpar	9
2.2 Eletrodinâmica com o termo CPT-par	11
3 Violação da Simetria de Lorentz e Cenários Supersimétricos	17
3.1 Enfoques para incorporar a Supersimetria	17
3.2 Nosso critério de supersimetrização	21
3.3 Supersimetrização do termo CPT-ímpar	23
3.4 Supersimetrização do Termo CPT-par	27
3.4.1 Escolha do Supercampo Quiral	27
3.4.2 Supercampo vetorial	30
4 Fótons, Fotinos e Relações de Dispersão	35
4.1 O Caso CPT-ímpar	35
4.2 O Caso CPT-par	42
4.3 Ações Efetivas	50

5	Potenciais Inter-partícula	54
5.1	Formalismo invariante de gauge	54
5.2	Hamiltonianos Estendidos	57
5.3	Energia de Interação	63
6	Reflexões Conclusivas e Futuros Encaminhamentos	67
A	Elementos Básicos da SUSY-N=1	70
A.1	Formalismo em Supercampos N=1	72
A.2	Supercampos Quirais	75
A.3	Integração sobre as coordenadas de Grassmann	76
A.4	Supercampos Vetoriais	77
A.4.1	Teoria de Gauge Abeliana Supersimétrica	78
B	Convenções e Relações Espinoriais	81
B.1	Espinores	81
B.1.1	Notação	81
B.1.2	Convenções para a adição e conjugação Hermiteana de bispinores	82
B.2	Relações úteis para os Espinores de 4-componentes	82
B.3	Álgebra das Matrizes de Dirac	84

Capítulo 1

Introdução

Hoje em dia, não há dúvida de que o conceito de simetria tem-se convertido em um princípio organizador da Física Moderna; serve também como guia na exploração, formulação e unificação das leis fundamentais da Natureza. Entretanto, apesar de que o paradigma atual consista em impor o princípio de invariância da leis da Física, nosso mundo cotidiano é altamente assimétrico, de modo que, no caminho entre as escalas fundamentais e o regime de baixas energias, *algo* deve ter acontecido. Esse algo é chamado de quebra de simetria. Na Natureza, existem duas formas de quebrar a simetria: A primeira é a quebra explícita de simetria, onde o Lagrangeano do sistema possui termos que não são invariantes sob um determinado grupo de simetria, o que termina resultando em equações dinâmicas assimétricas. Mais interessante é a quebra espontânea de simetria, na qual as equações dinâmicas são invariantes, mas o vácuo da teoria não mantém esta simetria. A quebra espontânea de simetria é responsável pela existência de cristais (invariância translacional é quebrada), ferromagnetismo (quebra da simetria rotacional), supercondutividade (invariância de fase de partículas carregadas é quebrada) e a estrutura da teoria unificada eletrofraca, entre alguns exemplos que podemos mencionar. Com isto em mente, fica claro que uma busca de novas simetrias deve levar em conta esta discussão; assim, para cada nova simetria que descobrimos, a mesma deve ser quebrada total ou parcialmente de alguma forma, de outro modo ela deveria ter sido observada há muito tempo. Nesta competição

por entrar na história como uma nova simetria da Natureza, certamente a Supersimetria (SUSY) sobressai. Esta possui a faculdade de unificar bósons e férmions como sendo parte de uma mesma estrutura (supermultiplete), unificando desta forma a matéria e as forças. Além disso, a SUSY pode ser a resposta a um dos fenômenos mais intrigantes da Natureza, como é o problema de hierarquia, assim como propor candidatos à matéria escura do universo [1].

A discussão que acabamos de apresentar também se pode refletir no sentido contrário, de modo que é admissível nos perguntarmos até que ponto uma simetria que considerarmos bem estabelecida é exata na Natureza. Este pensamento longe de parecer meramente estético é chave para procurar sinais de uma nova Física. A razão desta afirmação se deve a que se espera que os efeitos das teorias candidatas de gravitação quântica sejam extremamente pequenos por causa da supressão por potências da massa de Planck. Portanto, pequenos desvios de alguma simetria que seja essencial na construção do Modelo Padrão ou da Relatividade Geral, como é o caso da simetria CPT e a simetria de Lorentz, sugerem fortemente que elas são vestígios dos efeitos de uma teoria mais fundamental.

Os primeiros que expuseram a possibilidade teórica de que uma candidata a teoria fundamental prevê um tipo de violação deste tipo foram Kostelecký e Samuel no trabalho pionero da Ref.[2]. Estes autores mostraram que, no contexto da teoria de campos de cordas, é possível induzir uma violação da invariância de Lorentz (LSV), através de um mecanismo que quebra espontaneamente a simetria, com campos tensoriais adquirindo um valor esperado no vácuo não-nulo. Posteriormente, a quebra da simetria de Lorentz não se restringiu somente ao território das cordas, e começou a ser estudada em outros modelos como teorias de campos não-commutativas [3] ou cenários de mundos-brana [4]

Com a motivação de pôr à prova a ideia da LSV, surgiu na literatura uma variedade de teorias para teste, nas quais se evita as dificuldades de lidar com uma teoria microscópica para favorecer um enfoque fenomenológico. O comum denominador destes modelos é a introdução de um conjunto de parâmetros que permitem (ou melhor dito, controlam e caracterizam) a violação da simetria de

Lorentz. Dentre estes podemos citar o modelo de Robertson-Mansouri-Sexl [5], modelos de relações de dispersão [6] e o modelo $TH\epsilon\mu$ [7]. Contudo, a teoria mais geral de todas elas é o modelo proposto por Kostelecký e colaboradores [8] chamado de Modelo Padrão Estendido (SME).

O Modelo Padrão Estendido é uma teoria efetiva que incorpora ao Lagrangeano do Modelo Padrão (SM) e da Relatividade Geral (GR) todos os possíveis termos escalares (infinitos, em princípio) que se podem construir com os campos do SM e da gravitação contraídos com coeficientes de índices tensoriais apropriados e que, no final, são os parâmetros fenomenológicos que dão conta da LSV. É importante ressaltar que os termos adicionados são escalares somente sob transformações que mudam o sistema de referência (transformações passivas), garantindo a independência da Física do sistema dos observadores que a estudam. Contrariamente, estes termos não são invariantes se a transformação que é realizada sobre o sistema (uma transformação ativa), a qual se define como aquela que atua sobre as variáveis dinâmicas (campos) enquanto o marco de referência é fixado. Isto é causado pela presença dos coeficientes tensoriais já mencionados, que serão interpretados como campos de fundo: campos externos que permeiam nosso sistema/universo, definindo direções privilegiadas no espaço-tempo e cujas fontes não podem ser acessadas. Em consequência, estes campos não se vêem afetados pelas transformações ativas, destruindo assim a equivalência entre estes e as transformações passivas.

No que segue da exposição, vamos nos restringir a uma sub-classe do SME. Especificamente, vamos estudar o setor formado por todos os termos renormalizáveis de dimensão $D \leq 4$ e invariantes de gauge. Este setor é chamado de Modelo Padrão Estendido Mínimo (*minimal* SME)

Com relação aos testes experimentais, o amplo alcance coberto pelo SME permitiu uma extensa pesquisa. No limite de espaço plano, para os diversos setores do Modelo Padrão, foram realizados estudos fenomenológicos que incluem elétrons, fótons, múons, bárions, neutrinos e o setor de Higgs [9]. Da mesma forma, o setor gravitacional tem sido analisado nas Ref. [10, 11, 12].

A violação da invariância CPT também vem sendo estudada no contexto de uma teoria de Dirac modificada [14], no seu limite não-relativístico, calculando o espectro de átomos de hidrogênio não-relativísticos [13]. Na linha de modelos fermiônicos em presença da LSV, tem-se dedicado um grande esforço para associar propriedades magnéticas de partículas neutras e de spin nulo, considerando acoplamentos não-mínimos de campos de fundo com a matéria fermiônica e os bósons [15, 16]. No âmbito da Física Atômica e da Ótica, devemos citar uma linha de trabalhos concebidos para examinar os efeitos da LSV em cavidades eletromagnéticas e sistemas óticos [17, 18], que vêm contribuindo para o estabelecimento de novos limites sobre os parâmetros associados à LSV.

Até agora, argumentamos que a origem da LSV é consequência da dinâmica de teorias mais fundamentais como, por exemplo, as cordas. Porém, todas estas teorias envolvem escalas de energia muito acima das escalas dos aceleradores atuais, de modo que fenômenos tais como a supersimetria (SUSY), que acredita-se manifestar nestes regimes, em princípio, não deveriam ser ignorados. Isto está resumido na hipótese de que, na escala fundamental onde ocorre a LSV, a supersimetria é exata ou, se já foi quebrada, deixa os seus resíduos através da presença de parceiros supersimétricos já dissociados. Portanto, a formulação de teorias que implementam a SuSy em modelos que quebram a simetria de Lorentz abrem uma rica linha de pesquisa na atualidade, sendo os pioneiros os trabalhos das referências [19, 20, 21, 22, 23]. Mais recentemente na literatura, a relação entre a quebra da SUSY e a LSV foi discutida por Chkareuli e Pospelov-Tamarit [24, 25], onde os autores consideram a possibilidade de que a quebra da SUSY e da simetria de Lorentz possuam uma origem comum se a matéria supersimétrica fosse acoplada com a gravitação de Horava-Lifshitz.

Dentro desta linha de pesquisa, nosso grupo do CBPF vem subscrevendo, há varios anos, a tese de que a quebra de SUSY e a LSV não são fenômenos totalmente independentes no regime de altas energias. Nosso enfoque particular sobre a relação entre SUSY/LSV é baseada na seguinte ideia-chave: A LSV é colocada

dentro de um cenário onde a SUSY ainda se mantém como uma simetria exata, para após se perceber que a quebra da simetria de Lorentz induz naturalmente uma violação da SUSY. Finalmente, com a ideia de que a SUSY está presente desde o início, afirmamos que os campos de fundo (vetorial ou tensorial), responsáveis pela LSV devam ser campos componentes de algum supermultipleteo, o qual introduz em nosso modelo campos de fundo de natureza fermiônica.

Seguindo esta direção, nossos esforços vêm-se concentrando em propor um cenário dominado pela supersimetria para estudar a LSV, nos restringindo contudo ao setor de gauge abeliano da versão mínima do SME, o qual é descrito pelo seguinte Lagrangeano:

$$\mathcal{L}_{\text{g.a.}}^{(SME)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(k_{AF})^\alpha\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}A^\beta F^{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

Aqui, o termo k_{AF} , conhecido também na literatura como o termo tipo Chern-Simons ou termo de Carroll-Field-Jackiw (CFJ) quebra tanto a simetria de Lorentz como a simetria CPT. A proposta de supersimetrização para este termo passa por encaixar o campo vetorial de fundo dentro de um supermultipleteo quirral [26]. Entretanto, o termo tensorial, k_F , só viola a simetria de Lorentz e seus graus de liberdade são reduzidos, por argumentos de causalidade, o que abre a possibilidade de ser colocado dentro de um multipleo quirral ou vetorial [27].

A presente Tese representa a continuação desta linha de pesquisa. Assim, os primeiros esforços são dedicados a obter as relações de dispersão para cada setor por separado, encontrado que as relações de dispersão para o fóton são as mesmas que no caso não-supersimétrico. Posteriormente as relações de dispersão do fotino são calculadas. Elas representam a contribuição original da Tese e confirmam a quebra da Supersimetria devido a presença de polos diferentes ao do caso fotônico. Neste processo, mostramos também que os campos de fundo fermiônicos acabam por se agrupar e formar estruturas bilineares (condensados) que induzem efeitos físicos como o desdobramento das massas dos parceiros supersimétricos exibidas dentro de um conjunto de relações de dispersão estendidas para o setor do fóton e do fotino. Nesta direção, podemos citar também o interessante trabalho

de Tomboulis [28]. Esta é a primeira questão original que atacamos na Tese: remeter a origem microscópica das entidades que violam a simetria de Lorentz ao fenômenos de condensação de férmions de uma natureza ainda supersimétrica.

Para poder levar estes efeitos a um território semi-fenomenológico, calcularemos as teorias efetivas de cada setor (CPT-par e-ímpar) integrando o campo do fotino em cada caso. Mostraremos que os modelos fotônicos derivados têm uma dependência nos condensados fermiônicos que, neste contexto, serão os mensageiros da LSV. Dentro de uma eletrodinâmica modificada (que carrega os vestígios da SUSY), discutimos a surgimento de um potencial inter-partícula que possui um termo de perfil confinante acompanhado de um termo de tipo Yukawa cujos parâmetros incorporam a contribuição dos campos bosônicos e dos bilineares fermiônicos. Concluimos, assim, que a LSV e a dinâmica supersimétrica que induzem a formação de pares de férmions podem estar presentes na energia electrostática de interação entre duas partículas de cargas opostas. Estas questões, e a derivação sistemática de relações de dispersão estendidas para o fotino, formam um outro conjunto de problemas originais de pesquisa investigados nesta Tese. O formalismo que aqui desenvolvemos mostrou-se muito propício para a elaboração de respostas a estes objetos de pesquisa

A organização da Tese é como segue: O Capítulo 2 resume de forma breve os principais aspectos do setor puramente fotônico do SME (mínimo); na continuação, no Capítulo 3, revisamos as diferentes propostas para implementar a supersimetria no contexto de uma teoria que realiza a quebra da simetria de Lorentz, incluindo a linha particular seguida por nosso Grupo. Os capítulos restantes contêm o material original da Tese. Assim, temos que o Capítulo 4 é dedicado a derivar as relações físicas que desejamos discutir: A separação das massas fóton-fotino, as relações de dispersão e as ações efetivas fotônicas herdadas da LSV. No Capítulo 5, calculamos o potencial electrostático entre duas cargas opostas. Finalmente no Capítulo 6 organizamos as nossas Discussões Finais e Futuros Encaminhamentos

Acrescentamos ainda os Apêndices A e B. O primeiro deles faz uma breve exposição dos conceitos fundamentais da SUSY, aliás, aí são coletados as definições relevantes e a notação utilizada para o leitor que desejar reproduzir os cálculos. Já no final, o Apêndice B reúne uma série de resultados úteis da álgebra espinorial e das matrizes de Dirac; além disso são relatados nesta seção alguns aspectos particulares de cálculo.

Capítulo 2

Eletrodinâmica e Violação da Simetria de Lorentz

Desde a formulação do SME até nossos dias o estudo fenomenológico do mesmo, constitui um campo ativo e muito rico em pesquisa que só tem crescido com os anos. Este grande aparato fenomenológico pode ser organizado em dois grandes subconjuntos. O primeiro grupo são os experimentos terrestres de alta precisão, que procuram desvios da simetria de Lorentz a baixas energias, que por sua vez pode ser classificado pelos setores do SME que atingem. Assim, a lista inclui experimentos de comparação de relógios (geralmente impõem limites para os prótons e nêutrons), experimentos com cavidades ressonantes (similares aos anteriores com a diferença que limita os parâmetros do setor electromagnético), balanças de torção para spins (setor dos elétrons), experimentos com spins nucleares (quarks e fótons), armadilhas de Penning (elétrons/positrons, prótons/anti-prótons) e experimentos com mésons neutros.

O segundo grupo são as observações astrofísicas, que permite não só impor limites no mSME como também em operadores de dimensões maiores por causa das altas energias atingidas nas fontes astrofísicas ($\approx 10^{20} eV$). Uma breve lista inclui as reações limiares (várias partículas), Radiação síncrotron, tempos de vida para fótons e neutrinos, e birrefringência do vácuo (fótons). As seguintes referências

são excelentes para o leitor que deseja conhecer os detalhes [29].

De todos os setores do Modelo Padrão Estendido referidos, provavelmente o mais estudado, mesmo antes de ser formalmente proposto, é aquele que corresponde ao setor do fóton, ou setor de gauge Abelian. Na formulação mínima, este setor é descrito pela adição de dois termos. O primeiro deles viola também a simetria CPT e é formado por um operador de dimensão 3, enquanto que o segundo respeita CPT e é conformado por um termo de dimensão 4. A fenomenologia deste setor mostra que, para ambos casos, o fenômeno da birrefringência do vácuo emerge como uma consequência natural da LSV, convertendo-se em uma de seus principais aspectos. Neste breve capítulo, resumiremos os aspectos relevantes destes modelos, apresentaremos as equações de movimento, relações de dispersão e os limites superiores impostos pelas observações, tanto astrofísicas quanto terrestres, para os parâmetros que controlam a quebra da simetria de Lorentz. Particularmente, vamos nos deter no setor que conserva a simetria CPT, discutindo a redução de graus de liberdade do tensor responsável pela LSV, visando preparar o terreno para a supersimetrização.

2.1 Eletrodinâmica com o termo CPT-ímpar

O lagrangeano que descreve tanto a violação de Lorentz como da simetria CPT no setor de gauge do SME é dado por:

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} + \mathcal{L}_{\text{CPT-ímpar}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(k_{AF})^\mu A^\nu F^{\alpha\beta} + j_\mu A^\mu. \quad (2.1)$$

Aqui, k_{AF} é um vetor constante com dimensão de massa que se acopla a um operador de dimensão 3, é invariante perante uma transformação de Lorentz ativa e dá conta da LSV. Pode-se verificar também que o Lagrangeano é invariante de gauge a menos de uma quadri-divergência.

Historicamente, este foi o primeiro termo a ser estudado; apareceu, originalmente como uma generalização para $D = 3+1$ do termo de Chern-Simons (termos

topológicos genuínos de CS só existem em dimensões ímpares [30]). Em associação aos autores da ref. [31], que foram os primeiros a estudar as consequências fenomenológicas da quebra de Lorentz, este modelo também é conhecido como a Eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw (CFJ). Estes autores mostraram que a LSV resulta em uma atividade ótica do vácuo (birrefringência), isto é, a existência de modos de propagação com velocidades de fase diferentes, produzindo uma rotação no plano de polarização. Para ilustrar como isto acontece, começaremos desenvolvendo as equações da teoria.

Utilizando as relações de Euler-Lagrange no Lagrangeano (2.7), encontramos as seguintes equações de movimento :

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu} - (k_{AF})_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= j^\nu, \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0,\end{aligned}\tag{2.2}$$

e que, em função dos campos elétrico e magnético assume a forma (por conveniência, vamos renomear $k_{AF} = v$):

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \rho + \vec{v} \cdot \vec{B}, \\ \nabla \times \vec{B} - \partial_0 \vec{E} &= \vec{J} + v_0 \vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} + \partial_0 \vec{B} &= 0.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Em função dos campos \vec{E} e \vec{B} , fica claro como as equações de Maxwell são modificadas; pode-se observar que isto só afeta o setor inhomogêneo. Manipulando as equações Maxwell modificadas, chegamos à equação de onda satisfeita pelo campo de gauge (no espaço de momenta) :

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\mu\nu} A^\nu(p) &= j^\mu \\ \text{com:} \\ \mathcal{O}_{\mu\nu}(p) &= -p^2 \eta_{\mu\nu} - i \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} v^\alpha p^\beta.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Logo, a relação de dispersão será dada pela equação $\det \mathcal{O} = 0$, a qual é:

$$p^4 - p^2 v^2 - (v \cdot p) = 0.\tag{2.5}$$

Chamando de $p = (\omega, \vec{p})$, encontramos que, em primeira ordem, esta equação tem as soluções:

$$|\vec{p}|_{\pm} = \omega \mp \frac{1}{2}(\vec{v} - v_0 \cos \theta), \quad (2.6)$$

o que evidencia dois modos de propagação diferentes. A mudança na fase, ϕ , de uma onda circularmente polarizada é proporcional à distância, L , percorrida pela luz:

$$\Delta\phi = \frac{1}{2}(|\vec{p}_+| - |\vec{p}_-|)L = \frac{1}{2}(\vec{v} - v_0 \cos \theta)L.$$

Este resultado é passível de observação e serve para estabelecer limites sobre o parâmetro v_μ .

Certamente o interesse pelo termo de CFJ vai além dos testes astrofísicos, como se pode evidenciar pela ampla literatura surgida a partir de 1990, onde múltiplos aspectos da teoria têm sido objeto de pesquisa. Assim, podemos mencionar pesquisas em propagação eletromagnética em guias de ondas [32], emissão de radiação Cherenkov no vácuo [33], modificações no efeito Casimir [34], redução dimensional [35], possíveis efeitos nas anisotropias da radiação cósmica de fundo [36], análise de consistência (estabilidade, causalidade e unitariedade) [37], modificações induzidas na QED [38] e controvérsias em torno da geração do termo ímpar nas correções radiativas [39]

2.2 Eletrodinâmica com o termo CPT-par

O Lagrangeano para este caso é:

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} + \mathcal{L}_{\text{CPT-par}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} + j_\mu A^\mu. \quad (2.7)$$

Aqui, k_F é um tensor constante adimensional que realiza a quebra da simetria de Lorentz e se acopla a um operador de dimensão 4. Por inspeção simples, vemos que as simetrias deste tensor são:

$$(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = -(k_F)_{\nu\mu\alpha\beta} = -(k_F)_{\mu\nu\beta\alpha}, \quad (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = (k_F)_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (2.8)$$

A primeira identidade limita o número de componentes independentes de 256 para 36, enquanto a segunda só deixa 21. O grau de liberdade correspondente à parte totalmente antisimétrica do tensor k_F pode ser eliminada, já que é proporcional a uma derivada total no Lagrangeano. Similarmente, podemos eliminar o grau que corresponde ao duplo traço, pois este é absorvido no termo cinético e posteriormente, eliminado, por uma normalização do coeficiente que multiplica o termo de Maxwell. Isto incorpora os seguintes vínculos em nosso tensor:

$$(k_F)_{\mu[\nu\alpha\beta]} = 0 \text{ e } (k_F)^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.9)$$

Com isto temos, finalmente, 19 componentes independentes.

As equações de movimento para este Lagrangeano são:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} + (k_F)^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu F_{\alpha\beta} &= j^\mu \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Assim, a Eletrodinâmica- k_F modifica somente o setor inhomogêneo das equações de Maxwell. Similarmente ao caso anterior, a relação de dispersão é dada por:

$$\begin{aligned} p_{0\pm} &= (1 + \rho \pm \sigma) |\vec{p}| \\ \text{onde:} \\ \rho &= -\frac{1}{2} \tilde{K}_\mu{}^\mu, \\ \sigma^2 &= \frac{1}{2} (\tilde{K}_{\mu\nu} \tilde{K}^{\mu\nu}) - \rho^2, \\ \tilde{K}^{\mu\nu} &= (k_F)^{\mu\nu\alpha\beta} \hat{p}_\alpha \hat{p}_\beta, \\ \hat{p}_\mu &= \frac{p^\mu}{|\vec{p}|}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Como se pode ver novamente, a relação de dispersão apresenta a dos modos propagantes com velocidades diferentes, portanto aqui também aparece o fenômeno da birrefringência.

Outro aspecto interessante é que a Eletrodinâmica que viola Lorentz pelo termo CPT-par possui uma interessante analogia com a Eletrodinâmica de meios macroscópicos. Para exibir esta equivalência, são utilizadas as seguintes combinações lineares do tensor k_F [40]:

$$\begin{aligned} (K_{DE})^{ij} &= -2(k_F)^{0i0j}, \\ (K_{HB})^{ij} &= -\frac{1}{2}\epsilon^{0pqi}\epsilon^{0klj}(k_F)_{pqkl}, \\ (K_{DB})^{ij} &= -(K_{HE})^{ji} = (k_F)_0{}^{i}{}_{pq}\epsilon^{0pqj}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde K_{DE} e K_{HB} são matrizes 3×3 simétricas e que, junto à condição de duplo traço nulo de k_F , implica $tr(K_{DE} + K_{HB}) = 0$; portanto, as duas matrizes têm um total de 11 componentes independentes. Conjuntamente, o vínculo $(k_F)_{\mu[\nu\alpha\beta]} = 0$ mostra que $K_{DB} = (K_{HE})^T$ é de traço nulo; por conseguinte, esta traz as 8 componentes restantes.

Com estas definições as equações de movimento (2.10) assumem a forma familiar das equações macroscópicas de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= j^0, \quad \nabla \times \vec{H} - \partial_0 \vec{D} = \vec{J}, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \quad \nabla \times \vec{E} + \partial_0 \vec{B} = 0; \end{aligned} \quad (2.13)$$

com os campos \vec{D} e \vec{H} sendo definidos convenientemente por:

$$\begin{aligned} \vec{D} &\equiv (1 + K_{DE})\vec{E} + K_{DB}\vec{B}, \\ \vec{H} &\equiv (1 + K_{DE})\vec{B} + K_{DB}\vec{E}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Outra decomposição muito útil é a que apresentamos abaixo:

$$\begin{aligned} (\tilde{K}_{e+})^{ij} &= \frac{1}{2}(K_{DE} + K_{HB})^{ij}, \\ (\tilde{K}_{e-})^{ij} &= \frac{1}{2}(K_{DE} - K_{HB})^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij}(K_{DE})_l{}^l, \\ (\tilde{K}_{0+})^{ij} &= \frac{1}{2}(K_{DB} + K_{HE})^{ij} \\ (\tilde{K}_{0-})^{ij} &= \frac{1}{2}(K_{DB} - K_{HE})^{ij}, \\ (\tilde{K}_{tr}) &= \frac{1}{3}(K_{DE})_l{}^l. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Todas as matrizes definidas aqui possuem traço nulo; além disso, de (2.12) percebe-se que todas elas são simétricas, com exceção de \tilde{K}_{0+} , que é anti-simétrica.

Em termos destas matrizes, o Lagrangeano (2.7) se escreve como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left[(1 + \tilde{K}_{tr}) \vec{E}^2 - (1 - \tilde{K}_{tr}) \vec{B}^2 \right] + \frac{1}{2} \vec{E} (\tilde{K}_{e+} + \tilde{K}_{e-}) \vec{E} + \\ & - \frac{1}{2} \vec{B} (\tilde{K}_{e+} + \tilde{K}_{e-}) \vec{B} + - \frac{1}{2} \vec{E} (\tilde{K}_{0+} + \tilde{K}_{o-}) \vec{B}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Esta equação mostra que a permissividade, ϵ , e a permeabilidade efetiva, μ , mudam da forma $\epsilon - 1 = -(\mu^{-1} - 1) = \tilde{K}_{tr}$, implicando uma modificação na velocidade de propagação da luz ($c = 1/\epsilon\mu = \frac{1 - \tilde{K}_{tr}}{1 + \tilde{K}_{tr}}$).

Fenomenologicamente, a decomposição mostrada acima, (2.15), é importante devido ao fato de que a birrefringência induzida pela quebra de Lorentz é controlada pelos 10 coeficientes $(\tilde{K}_{e+})^{ik}$ e $(\tilde{K}_{o-})^{ik}$, os quais são fortemente limitados pelo experimentos de espectropolarimetria de fontes cósmicas [42], fornecendo limites superiores da ordem de 10^{-32} . Por outro lado, estudos das nove componentes restantes (que serão chamadas de componentes não-birrefringentes), em experimentos de laboratórios [43, 44], impõem limites, no melhor dos casos, da ordem de 10^{-16} enquanto, experimentos de ausência de emissão de radiação Cherenkov em raios cósmicos ultra-energéticos [45] estabelecem limites superiores para estes parâmetros na ordem de $10^{-19} - 10^{-17}$. O que estes limites nos mostram é a grande diferença entre os parâmetros birrefringentes e não-birrefringentes, sendo que os primeiros estão muito mais restringidos do que os segundos. Isto fato motivará a se adotar uma aproximação onde os 10 parâmetros birrefringentes, $(\tilde{K}_{e+})^{ik}$ e $(\tilde{K}_{o-})^{ik}$, são zerados. Na literatura, a teoria que resulta de eliminação destes componentes é conhecida como Teoria Modificada de Maxwell Não-Birrefringente, e para a qual o tensor que governa a violação de Lorentz, k_F ,

assume a nova forma:

$$(k_F)^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\tilde{\kappa}^{\nu\beta}\eta^{\mu\alpha} - \tilde{\kappa}^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta} + \tilde{\kappa}^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \tilde{\kappa}^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha})$$

com:

$$\tilde{\kappa}^{\mu\nu} = (k_F)_{\alpha}{}^{\mu\alpha\nu}. \quad (2.17)$$

O tensor $\tilde{\kappa}^{\mu\nu}$ é um tensor simétrico sem traço, que dá conta das 9 componentes restantes. Na ref. [46], com o propósito de calcular o propagador de gauge da teoria, é proposta uma decomposição para $\tilde{\kappa}$ em função de dois vetores arbitrários ξ_μ e χ_μ :

$$\tilde{\kappa}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\xi^\mu\chi^\nu + \xi^\nu\chi^\mu) - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}(\xi \cdot \chi) \quad (2.18)$$

Entretanto, o caminho para a eliminação de graus de liberdade ainda pode continuar. Na ref. [41], as componentes do tensor $\tilde{\kappa}$ foram reduzidas adotando o *ansatz* $\xi^\mu = \chi^\mu$:

$$\tilde{\kappa}^{\mu\nu} = \xi^\mu\xi^\nu - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}(\xi^\rho\xi_\rho) \quad (2.19)$$

O uso de este *ansatz* é um caso especial, e tem se mostrado útil para poder acoplar o modelo não-birrefringente à gravitação. Logo, o que inicialmente era um tensor de 19 componentes independentes, agora é representado por um quadrivetor ξ_μ . Para nós, esta decomposição é particularmente atraente já que, se desejamos implementar uma extensão supersimétrica, será necessário diminuir as componentes do tensor k_F de modo que evitemos trazer campos parceiros com spins maiores que 2, que podem, potencialmente levar a uma violação da causalidade.

Pelo exposto acima, adotaremos, a partir de agora, este *ansatz*, o qual transforma nosso Lagrangeano para a forma:

$$\mathcal{L}_{\text{CPT-par}} = \frac{1}{4}(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} = \frac{1}{8}\xi_\mu\xi_\nu F^\mu{}_\kappa F^{\kappa\nu} + \frac{1}{16}\xi_\rho\xi^\rho F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.20)$$

Assim, após se ter passado por um processo de eliminação de graus de liberdade, chegamos a um Lagrangeano onde a violação da simetria de Lorentz é controlada

por um vetor, ξ_μ , da mesma forma que tínhamos no caso ímpar. Observamos também que, como consequência do *ansatz* escolhido, o Lagrangeano obtido só viola a simetria de Lorentz no primeiro termo.

A Eq. (2.20) nos fornece um Lagrangeano apropriado para o nosso programa de supersimetrização, que será desenvolvido no próximo Capítulo. Esperamos, com a discussão do presente Capítulo, ter fornecido alguns aspectos essenciais dos modelos de gauge Abelianos com LSV e que serão utilizados como o nosso laboratório teórico para as nossas explorações a respeito da relação entre LSV e SUSY, na busca de cenários para alguma física além do Modelo-Padrão.

Capítulo 3

Violação da Simetria de Lorentz e Cenários Supersimétricos

No presente capítulo, revisaremos os diferentes caminhos adotados para tentar construir modelos supersimétricos que incorporem a LSV. Dado que, tanto a simetria de Lorentz quanto a SUSY são simetrias espaço-temporais, é natural esperar que a quebra de uma delas esteja vinculada à quebra da outra; assim, uma provável violação da simetria de Lorentz pode trazer alguma luz à quebra da SUSY, sendo esta última um problema ainda em aberto. Aliás, as primeiras tentativas procuravam manter a SUSY exata, restringindo-se o tratamento à subálgebra das supercargas e translações. Como já é conhecido a quebra da simetria de Lorentz pode proceder de uma teoria fundamental como as cordas, na qual a supersimetria forma parte vital de sua formulação; este fato nos assinala que não é possível desconectar ambas as quebras e que ambos fenômenos devem conviver.

3.1 Enfoques para incorporar a Supersimetria

Uma primeira proposta para incorporar supersimetria em modelos com quebra de Lorentz encontra-se no trabalho de V.Kostelecký e M.Berger [47]. O objetivo dos autores foi investigar se as propriedades dos modelos supersimétricos poderiam ser mantidas apesar da quebra da simetria de Lorentz.

A visão que adotaram foi modificar a álgebra da SUSY, de modo que os tensores violadores de Lorentz apareçam nas relações de comutação dos geradores da SUSY. Seu argumento é que, mesmo modificando a álgebra, a teoria se mantém supersimétrica se a propriedade de que o comutador de duas transformações de supersimetria reproduz uma translação ($[\delta_1, \delta_2] = 2i\bar{\epsilon}_1\sigma^\mu\epsilon_2\partial_\mu$). Nas palavras dos autores, a essência da supersimetria é uma transformação entre bósons e férmions que produz um operador de translação sob anti-comutação:

$$[Q, P_\mu] = [P_\mu, P_\nu] = 0, \quad \{Q, Q\} = 2\gamma^\mu P_\mu. \quad (3.1)$$

Com o propósito de desenvolver esta ideia, os autores formularam uma extensão do modelo de Wess-Zumino que incorpora um termo que viola a simetria de Lorentz (mas não CPT), que chamaremos de $\mathcal{L}_{Lorentz}$. Logo, o Lagrangeano total do modelo é:

$$\mathcal{L}_{WZ-LV} = \mathcal{L}_{Cin.} + \mathcal{L}_{Massa} + \mathcal{L}_{Int.} + \mathcal{L}_{Lorentz}, \quad (3.2)$$

com:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Cin.} &= \frac{1}{2}\partial_\mu A\partial^\mu A + \frac{1}{2}\partial_\mu B\partial^\mu B + \frac{1}{2}i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}G^2, \\ \mathcal{L}_{Massa} &= m\left(-\frac{1}{2}\bar{\Psi}\Psi + AF + BG\right), \\ \mathcal{L}_{Int.} &= \frac{g}{\sqrt{2}}\left[F(A^2 - B^2) + 2GAB - \bar{\Psi}(A - i\gamma_5 B)\Psi\right], \end{aligned} \quad (3.3)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Lorentz} &= k_{\mu\nu}\partial^\mu A\partial^\nu A + k_{\mu\nu}\partial^\mu B\partial^\nu B + \\ &+ \frac{1}{2}k_{\mu\nu}k^\mu{}_\rho(\partial^\nu A\partial^\rho A + \partial^\nu B\partial^\rho B) + \\ &+ \frac{1}{2}ik_{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Aqui, o coeficiente $k_{\mu\nu}$ é um tensor de segunda ordem, simétrico, sem traço, adimensional e invariante sob transformações ativas e que mensura a magnitude da

violação da simetria de Lorentz.

Pode-se mostrar que o Lagrangeano total, \mathcal{L}_{WZ-LV} , é invariante sob transformações modificadas de supersimetria:

$$\begin{aligned}
\delta A &= \bar{\epsilon}\Psi, \\
\delta B &= i\bar{\epsilon}\gamma_5\Psi, \\
\delta\Psi &= -(i\gamma^\mu\partial_\mu + iK_{\mu\nu}\gamma^\mu\partial^\nu)(A + i\gamma_5B)\epsilon + (F + i\gamma_5G)\epsilon, \\
\delta F &= -\bar{\epsilon}(i\gamma^\mu\partial_\mu + iK_{\mu\nu}\gamma^\mu\partial^\nu)\Psi, \\
\delta G &= \bar{\epsilon}(\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu + iK_{\mu\nu}\gamma^\mu\partial^\nu)\Psi.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Agora, se calculamos o comutador entre duas transformações modificadas de SUSY obtemos:

$$[\delta_1, \delta_2]_{\text{nov}} = 2i\bar{\epsilon}_1\gamma^\mu\epsilon_2\partial_\mu + 2iK_{\mu\nu}\bar{\epsilon}_1\gamma^\mu\epsilon_2\partial^\nu \tag{3.6}$$

No formalismo da SUSY- $N = 1$, em termos de supercampos, o modelo é representado da forma:

$$\mathcal{S}_{WZ-CPT} = \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \left\{ \Phi_{(n)}^* \Phi_{(n)} + \left[\frac{1}{2}\Phi^2\delta^2(\theta) + \frac{g}{3}\Phi^3\delta^2(\theta) + h.c. \right] \right\}, \tag{3.7}$$

onde definimos $\Phi_{(n)}$

$$\begin{aligned}
\Phi_{(n)}(x, \theta, \bar{\theta}) &= U\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{ik_{\mu\nu}(\bar{\theta}\sigma^\mu\theta)\partial^\nu} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \\
&= \phi + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}(\partial_\mu + k_{\mu\nu}\partial^\nu)\phi - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2(\partial_\mu + k_{\mu\nu}\partial^\nu)(\partial^\mu + k^{\mu\rho}\partial_\rho)\phi \\
&\quad + \sqrt{2}\theta\psi + i\sqrt{2}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\theta(\partial_\mu + k_{\mu\nu}\partial^\nu)\psi + \theta^2F.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Os autores também mostraram que é possível construir uma extensão que viole a simetria CPT:

$$\mathcal{L}_{WZ-CPT} = \mathcal{L}_{Cin.} + \mathcal{L}_{Massa} + \mathcal{L}_{Int.} + \mathcal{L}_{CPT},$$

com:

$$\mathcal{L}_{CPT} = k_\mu(A\partial^\mu B - B\partial^\mu A) + \frac{1}{2}k^2(A^2 + B^2) - \frac{1}{2}k_\mu\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu\Psi \tag{3.9}$$

Este Lagrangeano se transforma como uma derivada total sob o conjunto de transformações infinitesimais:

$$\begin{aligned}
\delta A &= \bar{\epsilon}\Psi, \\
\delta B &= i\bar{\epsilon}\gamma_5\Psi, \\
\delta\Psi &= -(i\gamma^\mu\partial_\mu + ik_\mu\gamma^\mu)(A + i\gamma_5B)\epsilon + (F + i\gamma_5G)\epsilon, \\
\delta F &= -\bar{\epsilon}(i\gamma^\mu\partial_\mu + ik_\mu\gamma^\mu)\Psi, \\
\delta G &= \bar{\epsilon}(\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu + ik_\mu\gamma^\mu)\Psi,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

porém, este modelo exibe uma dificuldade de encontrar uma realização para a carga quiral associada. Isto se deve a que não há uma propriedade de fechamento para o comutador de duas transformações já que $[\delta_1, \delta_2]_{\text{left}} \neq [\delta_1, \delta_2]_{\text{right}}$.

Quase ao mesmo tempo, Nibbelink e Pospelov [?] também se focaram no problema de introduzir a quebra da simetria de Lorentz em teorias de campo supersimétricas. Porém, a motivação destes autores para introduzirem a SUSY foi para tentar resolver o problema que apresentam os operadores violadores de Lorentz de dimensão 3 no regime UV, onde correções quânticas dão conta da transmutação dimensional de um operador dimensionalmente maior em outro de dimensão menor, com um coeficiente quadraticamente divergente:

$$[LV]_{dim=5} \sim (\text{Fator de Loop}) \Lambda_{UV}^2 \times [LV]_{dim=3} \tag{3.11}$$

Aqui, $[LV]_{dim=3,5}$ representam operadores genéricos de dimensões 3 e 5, que violam a simetria de Lorentz. Logo, se a escala do *cutoff*, Λ_{UV} , é tomada da ordem de M (escala da nova física), são gerados operadores de dimensão 3 muito divergentes.

É aqui que a supersimetria entra em cena, já que esta pode prover regras de seleção para os operadores violadores de Lorentz tendo a função de uma simetria protetora. Assim, os autores mostraram que no Modelo Padrão Minimamente Supersimétrico (MSSM) os requerimentos de uma SUSY exata e a simetria de gauge restringem os operadores que quebram Lorentz para ter dimensão 5 ou

maior. Assim, constróem uma ação supersimétrica para o setor de gauge do MSSM que incorpora todos os possíveis operadores de dimensão 5:

$$\begin{aligned}
S &= \int d^4x d^2\theta \left(\frac{1}{16e^2} W^2 + mE_+E_- \right) + h.c + \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \bar{E}_\pm e^{\pm V} E_\pm + \\
&+ \frac{1}{M} \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \left(iN_\pm^\mu \bar{E}_\pm e^{\pm V} \mathcal{D}_\mu E_\pm - \frac{1}{2} N^\mu \bar{W} \bar{\sigma}_\mu W \right) + \\
&+ \frac{1}{M} \int d^4x d^2\theta C^{\mu\nu\lambda} W \sigma_{\mu\nu} \partial_\lambda W + h.c,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

onde E_\pm são supercampos quirais, V é o supercampo vetorial, N_\pm^μ e $C^{\mu\nu\lambda}$ são tensores constantes responsáveis pela LV.

E o que acontece com os operadores de dimensão 3? Estes são permitidos, uma vez que a supersimetria é quebrada. Assim, uma vez que a SUSY é suavemente quebrada as divergências quadráticas são estabilizadas. Deste modo, ao implementar a quebra da SUSY, os operadores de dimensão 3 são gerados por transmutação dimensional da forma ($m_s \sim 1TeV$):

$$[LV]_{dim=5} \sim (\text{Fator de Loop}) m_s^2 \times [LV]_{dim=3}; \tag{3.13}$$

embora se possa esperar que o termo de Chern-Simons possa aparecer via correções quânticas, os autores mostraram que tal termo não é de fato gerado [20]

3.2 Nosso critério de supersimetrização

Com o trabalho da ref. [49], em 2003, nosso grupo do CBPF iniciou uma linha de pesquisa com uma visão para incorporar a SUSY que se distanciava do enfoque de Berger-Kostelecký, evitando modificar a álgebra da SUSY. O resultado foi um programa no qual se acomodam os termos do SME em extensões que são originalmente supersimétricas e que, quando se exige que os campos de fundo adquiram valores constantes para implementar a quebra da simetria de Lorentz, encontra-se que tanto a SUSY como a simetria de Lorentz são violadas simultaneamente. Este fato define uma escala muito especial.

A construção destas extensões segue em essência o que pode ser chamado de critério canônico de supersimetrização, no qual qualquer ação que seja considerada como candidato para nossa extensão deve satisfazer os seguintes princípios: adimensionalidade, realidade e ser invariante pelas simetrias de gauge, Lorentz e SUSY. Este último nos motiva fortemente a adotar o formalismo de supercampos, de modo que a invariância perante SUSY seja garantida desde o início e de forma manifesta.

Com estas diretrizes, o último passo é incorporar o que chamaremos de supercampos de fundo, que serão os supercampos onde procuraremos acomodar os tensores que realizam a quebra de Lorentz. Estes supercampos de fundo, junto aos supercampos que contêm os campos fundamentais do modelo acomodarão todos os elementos de que precisamos para construir nossas ações supersimétricas.

No nosso caso (estamos estudando o setor eletromagnético do Modelo Padrão Estendido), o único campo fundamental que consideraremos é o campo de gauge, A_μ , e o correspondente tensor intensidade de campo, $F_{\mu\nu}$. Na nossa particular abordagem, contrariamente às propostas anteriormente apresentadas, teremos um fundo de natureza fermiônica, e suas consequências podem ser muito ricas.

Logo, da teoria supersimétrica de Maxwell temos os seguintes supercampos relevantes:

Em primeiro lugar, declaramos o supercampo vetorial, que acomoda o campo do fóton e seu parceiro o fotino. No calibre de Wess-Zumino este é expresso como:

$$V_{WZ} = (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu + \theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda} + \bar{\theta}^2\theta\lambda + \theta^2\bar{\theta}^2 D. \quad (3.14)$$

A partir dele, é construído o supercampo W_α , definido por $W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha V$, onde:

$$D_\alpha V = (\sigma^\mu\bar{\theta})_\alpha A_\mu + 2\theta_\alpha\bar{\theta}\bar{\lambda} + \bar{\theta}^2\lambda_\alpha + 2\theta_\alpha D - i\theta^2\bar{\theta}^2(\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda})_\alpha + \theta^2(\sigma^{\mu\nu}\theta)_\alpha F_{\mu\nu} \quad (3.15)$$

e

$$\begin{aligned}
W_\alpha(x) = & \lambda_\alpha(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\lambda_\alpha(x) - \frac{1}{4}\bar{\theta}^2\theta^2\Box\lambda_\alpha(x) + \\
& 2\theta_\alpha D(x) - i\theta^2(\bar{\theta}\sigma^\mu)_\alpha\partial_\mu D(x) + (\sigma^{\mu\nu}\theta)_\alpha F_{\mu\nu}(x) \\
& - \frac{1}{2}\theta^2(\sigma^{\mu\nu}\sigma^\rho)_\alpha\partial_\rho F_{\mu\nu}(x) - i(\sigma^\mu\partial_\mu\lambda[x])_\alpha\theta^2.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Com este supercampo, reproduzimos a ação de Maxwell:

$$\begin{aligned}
S_{\text{Maxwell}}^{(SUSY)} &= \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \left\{ W_\alpha W^\alpha \delta^2(\bar{\theta}) + \bar{W}_\alpha \bar{W}^\alpha \delta^2(\theta) \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{i}{2}\lambda\sigma^\mu\partial\bar{\lambda} + 2D^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

no que se segue, veremos como aplicar este critério para construir extensões supersimétricas para os dois termos do setor de gauge Abelian do SME.

3.3 Supersimetrização do termo CPT-ímpar

Neste caso, o termo que se quer supersimetrizar é:

$$S_{\text{CPT-ímpar}} = \int d^4x \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(k_{AF})_\mu A_\nu F_{\alpha\beta}. \tag{3.18}$$

O primeiro a se considerar é especular onde podemos acomodar o campo de fundo $(k_{AF})_\mu \equiv v_\mu$. Para isto, a simetria de gauge nos dá uma noção. Assim, sob uma transformação de gauge, $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\alpha(x)$, nossa ação transforma-se :

$$\delta S = \frac{1}{8} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \alpha(x) (\partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu) F_{\alpha\beta}. \tag{3.19}$$

Para que a ação seja invariante de gauge devemos exigir que o campo v_μ seja o gradiente de algum campo escalar. Utilizando um princípio de economia (para se evitar ter que lidar com campos de spins altos), podemos propor como uma boa hipótese que a origem deste campo de fundo seja a componente escalar de um supercampo quirial, que é o supercampo que possui o conjunto mínimo possível de campos componentes . Designaremos este supercampo de fundo por S :

$$\begin{aligned}
S(x) = & s(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu s(x) + \\
& \theta^2 F(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\bar{\theta}\sigma^\mu\partial_\mu\psi(x) - \frac{1}{4}\bar{\theta}^2\theta^2\Box s(x).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Nosso objetivo agora é reproduzir o termo que viola a simetria de Lorentz. Para isto, analisemos a estrutura que este termo possui:

$$(F^{\mu\nu} - \text{intensidade de campo}) \times (A^\alpha - \text{campo de gauge}) \times (\text{campo do fundo}) \quad (3.21)$$

Cada campo que está representado em (3.21) deve pertencer a um supercampo em específico. Assim, temos que o campo de gauge aparece tanto dentro do supercampo vetorial, V , como na derivada $D_\alpha V$; por outro lado, o campo $F^{\mu\nu}$ aparece dentro de $D_\alpha V$ e do supercampo W_α ; finalmente, propormos que o campo de fundo deva ter sua origem na componente do supercampo quirral, S . Com isto, temos identificado todos os supercampos com os quais podemos construir nossa ação, a mesma que será dada por um produto conveniente destes supercampos acima. A forma explícita de como são encontrados os campos de (3.21) dentro de cada supercampo é mostrada a seguir:

	Campo de Gauge	Intensidade de campo
$V :$	$(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu \Rightarrow \textcircled{1}$	-----
$D_\alpha V :$	$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} A_\mu \Rightarrow \textcircled{2}$	$\bar{\theta}^2 (\sigma^{\kappa\rho})_\alpha{}^\beta \theta_\beta F_{\kappa\rho} \Rightarrow \textcircled{3}$
$W_\alpha :$	-----	$(\sigma^{\lambda\gamma})_\alpha{}^\epsilon \theta_\epsilon F_{\lambda\gamma} \Rightarrow \textcircled{4}$
Componentes Bosônicas		
$S :$	$s \Rightarrow \textcircled{5}$	$-i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu s \Rightarrow \textcircled{6}$

Devemos ter em mente que, sem importar qual seja a combinação escolhida para multiplicar os supercampos, nossa ação será consituída pelo termo proporcional a $\bar{\theta}^2\theta^2$. Assim, a nossa estratégia consistirá em multiplicar convenientemente os termos numerados do $\textcircled{1}$ até $\textcircled{6}$, de modo que temos que multiplicar os termos para que reproduzam a estrutura de campos em (3.21) e ao mesmo tempo dêem conta da mais alta potência nas variáveis de Grassmann. Por último, temos que ter cuidado para que todos os índices das representações de Lorentz estejam saturados. Com todas estas regras, percebemos, sem muita dificuldade, que há uma combinação possível é o produto dos termos $\textcircled{3}\textcircled{4}\textcircled{5}$. Assim temos:

$$\textcircled{3}\textcircled{4}\textcircled{5} = s \bar{\theta}^2 (\sigma^{\kappa\rho})_{\alpha}{}^{\beta} \theta_{\beta} (\sigma^{\lambda\gamma})_{\alpha}{}^{\beta} \theta_{\beta} F_{\lambda\gamma} F_{\kappa\rho}. \quad (3.22)$$

Utilizando a parte totalmente antisimétrica de $\sigma^{\kappa\rho}\sigma^{\lambda\gamma}$, e deslocando uma derivada de uma das intensidades de campo, chegamos à seguinte forma

$$\textcircled{3}\textcircled{4}\textcircled{5} \sim \partial_{\mu} s \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_{\nu} F_{\alpha\beta} \bar{\theta}^2 \theta^2. \quad (3.23)$$

Isto nos indica que a ação em supercampos que contém o termo CPT-ímpar é da forma $\sim W^{\alpha}(D_{\alpha}V)S$, ao qual será acrescentado seu Hermiteano conjugado para garantir a realidade da ação. Logo, a proposta para a extensão supersimétrica do termo de Chern-Simons que viola a simetria de Lorentz é escrita em superespaço- $N=1$ sob a forma:

$$S_{CPT\text{-ímpar}} = \int d^4x d^4\theta \{W^{\alpha}(D_{\alpha}V)S + \bar{W}_{\dot{\alpha}}(\bar{D}^{\dot{\alpha}}V)\bar{S}\}. \quad (3.24)$$

A expressão em campos componentes segue abaixo:

$$\begin{aligned} S_{\text{Maxwell}}^{(SUSY)} + S_{\text{CPT-ímpar}}^{(SUSY)} = \int d^4x \left[- \left[\frac{1}{4} + \frac{(s+s^*)}{2} \right] F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \right. \\ \left. \frac{i}{2} \partial_{\mu} (s-s^*) \epsilon^{\mu\alpha\beta\nu} F_{\alpha\beta} A_{\nu} + [2 + 4(s+s^*)] D^2 \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{2} + 2s \right) i \lambda \sigma^{\mu} \partial_{\mu} \bar{\lambda} - \left(\frac{1}{2} + 2s^* \right) i \bar{\lambda} \bar{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu} \lambda \right. \\ \left. - \sqrt{2} \lambda \sigma^{\mu\nu} \psi F_{\mu\nu} + \sqrt{2} \bar{\lambda} \bar{\sigma}^{\mu\nu} \bar{\psi} F_{\mu\nu} \right. \\ \left. + \lambda \lambda F + \bar{\lambda} \bar{\lambda} F^* - 2\sqrt{2} \lambda \psi D - 2\sqrt{2} \bar{\lambda} \bar{\psi} D \right]. \quad (3.25) \end{aligned}$$

Como podemos ver, a Eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw é reproduzida, fixando-se convenientemente a componente bosônica do supercampo S como segue:

$$(s+s^*) = 0 \quad e \quad (s-s^*) = -\frac{i}{2} v_{\mu} x^{\mu}. \quad (3.26)$$

Deste modo, o quadri vetor constante, v_{μ} , que realiza a quebra da simetria de Lorentz no modelo clássico é acomodado dentro do supercampo de fundo e se obtém do gradiente da parte imaginária do escalar complexo s . A supersimetria, então, fixa que o vetor de fundo, v^{μ} , seja necessariamente dado pelo gradiente de

uma função escalar, o que assegura a invariância de gauge do termo que viola a simetria de Lorentz.

Agora que já identificamos o campo de fundo, v_μ , passemos a analisar as transformações de SUSY para o supercampo de fundo, S :

$$\begin{aligned}\delta s &= \sqrt{2}\epsilon\psi \\ \delta\psi_\alpha &= \sqrt{2}F\epsilon_\alpha + i\sqrt{2}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu s \\ \delta F &= i\sqrt{2}\bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}}\sigma^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\partial_\mu\psi_\alpha.\end{aligned}\tag{3.27}$$

Para que v_μ seja constante, necessariamente $\partial_\mu s \neq 0$. Logo, para uma configuração do tipo: $S = \left\{ \partial_\mu s \neq 0, \psi = 0, F = 0 \right\}$, vemos que é inevitável a quebra da SUSY. É neste sentido que diremos que a quebra da simetria de Lorentz induz a quebra da SUSY.

Este ponto é central em toda nossa proposta. O critério para se estabelecer uma quebra que não seja explícita da SUSY é através da emergência de um férmion de Goldstone; em nosso caso especial, a geração de $\delta\psi_\alpha \neq 0$. Nos tratamentos convencionais, $\delta\psi_\alpha \neq 0$ através de uma configuração não-trivial constante do campo F , $\delta\psi_\alpha = \sqrt{2}\epsilon_\alpha F \neq 0$, com $\partial_\mu s = 0$. O escalar auxiliar $F \neq 0$ induz o modo fermiônico de Goldstone.

A abordagem que estabelecemos aqui foge a este mecanismo:

$$\delta\psi_\alpha \neq 0 \text{ porque } \partial_\mu s \neq 0.\tag{3.28}$$

Desta forma, $\partial_\mu s \equiv v_\mu$, estabelece uma direção privilegiada no espaço-tempo e esta anisotropia, que quebra a simetria de Lorentz, induz a geração do modo fermiônico de Goldstone, $\partial\Psi \neq 0$, configurando assim a quebra (espontânea de SUSY). Insistimos neste ponto, pois é esta abordagem que difere a nossa proposta dos demais cenários de SUSY com LSV.

3.4 Supersimetrização do Termo CPT-par

Agora, a nossa tarefa é supersimetrizar a ação:

$$S = \int d^4x (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} = \int d^4x \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \xi_\mu \xi_\nu F^\mu{}_\kappa F^{\kappa\nu} + \frac{1}{8} \xi_\rho \xi^\rho F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right). \quad (3.29)$$

Como no caso anterior, o primeiro passo será decidir onde podemos localizar o fundo vetorial, ξ_μ . No trabalho da Ref.[50], dois caminhos foram sugeridos para implementar uma extensão supersimétrica: 1) ξ_μ pode aparecer como o gradiente de um escalar (Neste caso, a LSV está presente em um supercampo quiral) ou 2) um vetor completo (com componentes transversais e longitudinais); no último caso, ξ_μ deve ser a componente vetorial de um supercampo escalar real, que se denomina supercampo vetorial.

3.4.1 Escolha do Supercampo Quiral

Neste caminho, escolhe-se por identificar o vetor de fundo, ξ_μ , com o gradiente do campo escalar complexo, S , que pertence a o supermultiplete Ω :

$$\begin{aligned} \Omega(x) = & S(x) + \sqrt{2}\theta\zeta(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu S(x) + \\ & \theta^2 G(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\bar{\theta}^{\bar{\sigma}\mu}\partial_\mu\zeta(x) - \frac{1}{4}\bar{\theta}^2\theta^2\Box S(x). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Dado que aqui ξ_μ é um vetor complexo, a supersimetria modifica um pouco a forma do tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$, de modo que este é construído como segue:

$$\tilde{\kappa}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu S \partial_\nu S^* + \partial_\nu S \partial_\mu S^*) + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}(\partial_\kappa S \partial^{\kappa} S^*). \quad (3.31)$$

$$(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\eta_{\mu\alpha}\tilde{\kappa}_{\nu\beta} - \eta_{\mu\beta}\tilde{\kappa}_{\nu\alpha} + \eta_{\nu\beta}\tilde{\kappa}_{\mu\alpha} - \eta_{\nu\alpha}\tilde{\kappa}_{\mu\beta}). \quad (3.32)$$

Isto ficará claro observando-se a forma do setor puramente fotônico da ação que se propõe em seguida (na verdade, como veremos abaixo, a Eq.(3.35)).

A ação em supercampos que incorpora o termo CPT-par é proposto como:

$$S_{\text{CPT-par}}^{(SUSY)} = \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \left[(D^\alpha \Omega) W_\alpha (\bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{\Omega}) \bar{W}^{\dot{\alpha}} + h.c. \right]. \quad (3.33)$$

Contrariamente ao caso ímpar, onde tínhamos uma expressão relativamente simples para a ação em campos componentes, a ação do caso par é extremamente complexa. Para tal, é pertinente que, se desejamos derivar alguma fenomenologia, temos que simplificar estas expressões. Isto será possível se adotarmos valores particulares para as componentes do supercampo de fundo, Ω .

A expansão de nossa ação completa é organizada da forma que se segue:

$$S_{\text{CPT-par}}^{(SUSY)} = S_{\text{f\'erm}} + S_{\text{b\'os}} + S_{\text{misto}}, \quad (3.34)$$

com cada setor dado por:

$$S_{\text{b\'os}} = \int d^4x \left[D^2(32|G|^2 + 16\partial_\mu S \partial^\mu S^*) + 8iDF^{\mu\nu}(\partial_\mu S \partial_\nu S^* - \partial_\mu S^* \partial_\nu S) - 8F^{\mu\kappa} F_{\kappa}{}^\nu (\partial_\mu S \partial_\nu S^* + \partial_\mu S^* \partial_\nu S) - 4F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \partial_\rho S \partial^\rho S^* \right], \quad (3.35)$$

$$S_{\text{f\'erm}} = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\lambda \zeta \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\zeta} \lambda \sigma^\lambda \bar{\lambda} + \frac{1}{2} \partial_\lambda \zeta \sigma^\mu \bar{\lambda} \lambda \sigma^\lambda \partial_\mu \bar{\zeta} + 2\partial_\mu \zeta \partial^\mu \lambda \bar{\zeta} \bar{\lambda} + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \partial_\lambda \zeta \sigma^\lambda \partial_\mu \bar{\zeta} \lambda \sigma^\mu \bar{\lambda} - 2\partial_\lambda \zeta \sigma^\lambda \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda \bar{\zeta} \bar{\lambda} - \frac{1}{2} \lambda \sigma^\lambda \bar{\sigma}^\mu \partial_\lambda \zeta \bar{\zeta} \partial_\mu \bar{\lambda} + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \zeta \lambda \bar{\zeta} \square \bar{\lambda} - \zeta \lambda \partial_\mu \bar{\zeta} \bar{\sigma}^\mu \sigma^\tau \partial_\tau \bar{\lambda} + \frac{1}{2} \zeta \lambda \partial_\mu \bar{\lambda} \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \partial_\nu \bar{\zeta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \partial_\mu \zeta \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \lambda \bar{\zeta} \partial_\nu \bar{\lambda} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \zeta \square \lambda \bar{\zeta} \bar{\lambda} - \frac{1}{2} \zeta \partial_\nu \lambda \partial_\mu \bar{\lambda} \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\zeta} + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \zeta \partial_\nu \lambda \partial_\mu \bar{\zeta} \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \bar{\lambda} + \zeta \partial_\mu \lambda \bar{\zeta} \partial^\mu \bar{\lambda} - 2\zeta \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda} \bar{\zeta} \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \lambda + h.c. \right], \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned}
S_{\text{misto}} = \int d^4x \Big[& -4iD^2\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\zeta} - 2\sqrt{2}iDG^*\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + 2\sqrt{2}D\partial_\nu\lambda\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\zeta\partial_\mu S^* + \\
& 2D\zeta\sigma^\nu\partial_\mu\bar{\zeta}F_\nu{}^\mu + iD\epsilon^{\tau\rho\mu\nu}\zeta\sigma_\nu\partial_\mu\bar{\zeta}F_{\tau\rho} + \sqrt{2}G^*\zeta\sigma^\mu\partial_\nu\bar{\lambda}F_\mu{}^\nu + \\
& \frac{i}{\sqrt{2}}G^*\epsilon^{\tau\rho\mu\nu}\zeta\sigma_\nu\partial_\mu\bar{\lambda}F_{\tau\rho} + \sqrt{2}i\zeta\sigma^\tau\bar{\sigma}^\nu\partial_\nu\lambda\partial_\mu S^*F_\tau{}^\mu + \\
& -\frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^{\tau\rho\mu\lambda}\zeta\sigma_\lambda\bar{\sigma}^\nu\partial_\mu S^*\partial_\nu\lambda F_{\tau\rho} - 4\sqrt{2}iG^*D\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + \\
& +2\sqrt{2}D\zeta\partial_\mu\lambda\partial^\mu S^* - \frac{i}{\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\nu\kappa\tau}\zeta\partial_\tau\lambda\partial_\mu S^*F_{\nu\kappa} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\nu\kappa\tau}\zeta\partial_\tau\lambda\partial_\mu S^*F_{\nu\kappa} + \\
& -4iD^2\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\zeta - 2D\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\nu\partial_\mu\zeta F_\nu{}^\mu + iD\epsilon^{\nu\kappa\mu\rho}\bar{\zeta}\bar{\sigma}_\rho\partial_\mu\zeta F_{\nu\kappa} + \\
& +2\sqrt{2}iDG^*\partial_\mu\zeta\sigma^\mu\bar{\lambda} + 2D\partial_\mu\sigma^\tau\bar{\zeta}F_\tau{}^\mu + iD\epsilon^{\tau\rho\mu\nu}\partial_\mu\zeta\sigma_\nu\bar{\zeta}F_{\tau\rho} + \\
& 2\partial_\mu\zeta\sigma^\tau\bar{\sigma}^{\nu\kappa}\bar{\zeta}F_{\nu\kappa}F_\tau{}^\mu + i\epsilon^{\tau\rho\mu\lambda}\partial_\mu\zeta\sigma_\lambda\bar{\sigma}^{\nu\kappa}\bar{\zeta}F_{\tau\rho}F_{\nu\kappa} + \sqrt{2}G^*\partial_\mu\zeta\sigma^\tau\bar{\lambda}F_\tau{}^\mu \\
& -2iG\partial_\nu\lambda\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\lambda\partial_\mu S^* + 4\sqrt{2}iGD\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar{\zeta} - 2\sqrt{2}iGD\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda + \\
& -\sqrt{2}G\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\tau\lambda F_\mu{}^\tau + \frac{i}{\sqrt{2}}G\epsilon^{\mu\nu\tau\rho}\bar{\zeta}\bar{\sigma}_\rho\partial_\tau\lambda F_{\mu\nu} - 2i|G|^2\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda + \\
& +\frac{i}{\sqrt{2}}G^*\epsilon^{\tau\rho\mu\nu}\partial_\mu\zeta\sigma_\nu\bar{\lambda}F_{\tau\rho} - 2\sqrt{2}iGD\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\zeta} + 2i|G|^2\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + \\
& 2\sqrt{2}D\partial_\mu S\bar{\zeta}\partial^\mu\bar{\lambda} + \sqrt{2}i\partial_\mu(\bar{\lambda}\bar{\zeta})\partial_\lambda S F^{\lambda\mu} - \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\lambda\tau\rho}\partial_\mu(\bar{\lambda}\bar{\zeta})\partial_\lambda S F_{\tau\rho} + \\
& -2\sqrt{2}D\bar{\lambda}\partial_\mu\bar{\zeta}\partial^\mu S + 2\sqrt{2}D\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\partial_\nu\bar{\lambda}\partial_\mu S - \sqrt{2}i\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}F_{\nu\lambda}\partial^\lambda S + \\
& -\frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^{\nu\kappa\lambda\rho}\bar{\zeta}\bar{\sigma}_\rho\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}F_{\nu\kappa}\partial_\lambda S + 2G^*\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\partial_\nu\bar{\lambda}\partial_\mu S - 2\sqrt{2}\partial_\mu S\partial^\mu D\bar{\zeta}\bar{\lambda} + \\
& +\sqrt{2}D\partial_\nu\zeta\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\lambda\partial_\mu S^* - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\sigma}^\lambda\partial_\lambda\zeta\lambda\sigma^\nu\partial_\mu S^*F_\nu{}^\mu - \frac{1}{2}\partial_\lambda\zeta\sigma^\lambda\bar{\lambda}\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\zeta} + \\
& +\frac{1}{2\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\nu\kappa\rho}\lambda\sigma_\rho\bar{\sigma}^\lambda\partial_\lambda\zeta\partial_\mu S^*F_{\nu\kappa} - \frac{i}{\sqrt{2}}\partial_\rho\zeta\sigma^\nu\bar{\sigma}^\rho\lambda\partial_\mu S^*F_\nu{}^\mu + \\
& -\frac{1}{2\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\nu\kappa\alpha}\partial_\lambda\zeta\sigma_\alpha\bar{\sigma}^\lambda\lambda\partial_\mu S^*F_{\nu\kappa} + \sqrt{2}D\lambda\sigma^\lambda\bar{\sigma}^\mu\partial_\lambda\zeta\partial_\mu S^* + h.c. \Big]. \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Se observamos cuidadosamente, podemos perceber que nossa ação tem uma dependência no campo auxiliar, D , da forma $\alpha D^2 + \beta D$ com α e β sendo funções dos campos componentes e a intensidade de campo: $\alpha, \beta = f(F^{\mu\nu}, \lambda, S, \zeta, G,)$. Eventualmente, ao incorporarmos o termo cinético (super-ação de Maxwell), teremos que acrescentar o termo $2D^2$, de modo que, ao se calcular a equação de

movimento para D ($\frac{\delta S}{\delta D} = 0$), encontramos que $D = -\frac{\beta}{2(2+\alpha)}$. Este valor, quando substituído na ação, fornece uma contribuição do tipo:

$$(\text{Contr. D}) = - \int d^4x \frac{\beta^2}{4(2+\alpha)}. \quad (3.38)$$

No caso mais geral, esta última expressão é extremamente longa fornecendo termos na ação que serão agrupados em setores FF , $\tilde{F}\tilde{F}$, $F\tilde{F}$, $\lambda\lambda$, $\lambda\bar{\lambda}$, $\bar{\lambda}\bar{\lambda}$ e $F\lambda$. O leitor interessado na forma explícita destes termos poderá consultar a ref. [51]; porém, não é o propósito deste tese tratar o caso mais geral da Eq.(3.39). No próximo capítulo, trabalharemos uma forma particular desta contribuição.

3.4.2 Supercampo vetorial

A segunda proposta para supersimetrizar o termo CPT-par afasta-se um pouco do método até aqui descrito para construir super-ações compatíveis com a violação da simetria de Lorentz. A diferença é que, neste caso a supersimetria não dá conta da forma do vetor de fundo; ao contrário, este é introduzido a priori, como a componente, ξ_μ , de um supermultiplete vetorial constante Ξ :

$$\Xi = C + \theta\chi + \bar{\theta}\bar{\chi} + \theta^2 M + \bar{\theta}^2 M^* + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}\xi_\mu + \theta^2\bar{\theta}\bar{\psi} + \bar{\theta}^2\theta\psi + \theta^2\bar{\theta}^2 B. \quad (3.39)$$

Dado que, aqui, o supercampo vetorial Ξ não busca representar o campo de Maxwell A_μ , não vamos impor sobre ele a condição de invariância de gauge (que elimina um grau de liberdade de A_μ). Logo, a simplificação de componentes que se tinha no caso do V_{WZ} não pode ser aplicada a Ξ .

Para este caso especial, onde Ξ não tem dependência em x^μ , as transformações de SUSY para o supercampo vetorial são simplificadas, e adquirem a forma listada

abaixo:

$$\begin{aligned}
\delta C &= \epsilon^\alpha \chi_\alpha + \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}, \\
\delta \chi_\alpha &= 2M \epsilon_\alpha + \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} \xi_\mu, \\
\delta \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} &= -\epsilon^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \bar{\epsilon}^{\dot{\beta}} \xi_\mu + 2M^* \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}}, \\
\delta M &= \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}, \\
\delta M^* &= \epsilon^\alpha \psi_\alpha, \\
\delta \xi^\mu &= \epsilon^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} - \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \psi_\alpha, \\
\delta \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} &= 2\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} B, \\
\delta \psi_\beta &= 2\epsilon_\beta B, \\
\delta B &= 0.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Podemos observar, de forma imediata, que a SUSY é quebrada desde o início em virtude do caráter constante do supercampo Ξ . De novo, é o modo fermiônico χ_α a assinalar a quebra de SUSY, através do fundo não trivial ξ^μ . χ_α é, neste caso particular de cenário supersimétrico, o férmion de Goldstone que aparece como perturbação em torno do fundo ξ_μ .

A proposta dos autores de [51] para a super-ação que contém o termo CPT-par é como segue:

$$S = k \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \left\{ (D^\alpha \Xi) W_\alpha (\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Xi) \bar{W}^{\dot{\alpha}} + h.c. \right\}, \tag{3.41}$$

e cuja expansão completa em campos componentes é organizada da seguinte forma:

$$S = k \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \left\{ (D^\alpha \Xi) W_\alpha (\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Xi) \bar{W}^{\dot{\alpha}} + h.c. \right\} = S_{\text{bós}} + S_{\text{férm}} + S_{\text{misto}}, \tag{3.42}$$

onde:

$$\begin{aligned}
S_{\text{bós}} = k \int d^4x \left\{ \xi_\mu \xi_\nu F^\nu{}_\kappa F^{\kappa\mu} + \frac{1}{4} \xi_\kappa \xi^\kappa F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \right. \\
\left. \frac{i}{4} \xi_\nu \xi_\mu \epsilon^{\nu\tau\rho\kappa} F_{\tau\rho} F^\mu{}_\kappa - 2D^2 \xi_\mu \xi^\mu + 8|M|^2 D^2 + h.c. \right\}, \quad (3.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{\text{férm}} = k \int d^4x \left\{ -i\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}\bar{\chi}\bar{\lambda} + \psi\lambda\bar{\psi}\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar{\psi}\bar{\chi}\bar{\lambda} + \psi\lambda\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar{\chi} + \right. \\
\left. -\frac{i}{2}\lambda\sigma^\mu\bar{\chi}\partial_\mu\bar{\lambda} + \lambda^2\bar{\psi}\bar{\lambda} + i\chi\lambda\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar{\psi} - i\chi\lambda\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + h.c. \right\}, \quad (3.44)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
S_{\text{misto}} = & k \int d^4x \left\{ -\frac{3}{4}i\chi\lambda\xi_\mu\partial^\mu D - \frac{1}{2}\chi\lambda\xi_\mu\partial_\nu F^\nu{}_\mu + \right. \\
& -\frac{i}{2}\chi\lambda\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\xi_\nu\partial_\alpha F_{\beta\mu} + 4\chi\lambda BD + D\chi\sigma^\mu\bar{\chi}\partial_\nu F^\nu{}_\mu \\
& \frac{i}{4}D\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\chi\sigma_\nu\bar{\chi}\partial_\alpha F_{\beta\mu} - 6iDM^*\chi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + iD\partial_\nu\lambda\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\chi\xi_\mu \\
& -4D^2\chi\psi - \frac{i}{2}\chi\sigma^\tau\bar{\chi}F_{\tau\rho}\partial_\nu F^{\nu\rho} + \frac{1}{4}\epsilon^{\tau\rho\kappa\alpha}\chi\sigma_\alpha\bar{\chi}F_{\tau\rho}\partial_\nu F^\nu{}_\kappa + \\
& +\frac{1}{4}\epsilon^{\lambda\nu\kappa\rho}\chi\sigma^\tau\bar{\chi}F_{\tau\rho}\partial_\lambda F_{\nu\kappa} + \frac{i}{8}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\tau\rho}{}_{\beta\kappa}\chi\sigma^\kappa\bar{\chi}F_{\tau\rho}\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \\
& +M^*\chi\sigma^\tau\partial_\nu\bar{\lambda}F_\tau{}^\nu + \frac{i}{2}M^*\epsilon^{\tau\rho\mu\alpha}\chi\sigma_\alpha\partial_\mu\bar{\lambda}F_{\tau\rho} + \frac{1}{2}\chi\sigma^\tau\bar{\sigma}^\nu\partial_\nu\lambda\xi_\mu F_\tau{}^\mu + \\
& +\frac{i}{4}\epsilon^{\tau\rho\mu\alpha}\sigma_\alpha\bar{\sigma}^\nu\partial_\nu\lambda\xi_\mu F_{\tau\rho} - 2D\chi\sigma^{\tau\rho}\lambda F_{\tau\rho} + \frac{1}{2}\chi\partial_\mu\lambda\bar{\chi}\partial^\mu\bar{\lambda} + \\
& +i\chi\partial_\mu\lambda\xi^\mu - \bar{\chi}\bar{\sigma}^\nu\chi\partial_\mu DF_\nu{}^\mu + \frac{i}{2}\epsilon^{\nu\kappa\mu\alpha}\bar{\chi}\bar{\sigma}_\alpha\chi\partial_\mu DF_{\nu\kappa} + \\
& +iMD\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar{\chi} + \frac{i}{2}M\lambda\sigma^\kappa\bar{\chi}\partial_\mu F^\mu{}_\kappa - \frac{1}{4}M\epsilon^{\mu\nu\kappa\alpha}\lambda\sigma_\alpha\bar{\chi}\partial_\mu DF_{\nu\kappa} + \\
& -i|M|^2\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + iM\partial_\nu\lambda\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\lambda\xi_\mu - 4MD\lambda^2 \\
& -\frac{1}{2}\bar{\chi}\bar{\sigma}^\nu\partial_\mu\lambda F_\nu{}^\mu + \frac{i}{4}\epsilon^{\nu\kappa\mu\alpha}\bar{\chi}\bar{\sigma}_\alpha\partial_\mu\lambda F_{\nu\kappa} + \frac{i}{2}M^*\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar{\lambda} + \\
& +i\lambda\sigma^\mu\partial_\nu\bar{\lambda}\xi^\nu\xi_\mu - \frac{i}{2}\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}\xi_\nu\xi^\nu - \frac{1}{2}\epsilon^{\beta\nu\mu\alpha}\lambda\sigma_\alpha\partial_\nu\bar{\lambda}\xi_\beta\xi_\mu + \\
& +\frac{1}{2}\epsilon^{\nu\kappa\mu\alpha}\lambda\sigma_\alpha\bar{\psi}\xi_\mu F_{\nu\kappa} - B\lambda\sigma^\mu\bar{\lambda}\xi_\mu + \bar{\chi}\partial_\nu\bar{\lambda}\xi_\mu F^{\mu\nu} + \\
& +\frac{i}{2}\epsilon^{\tau\rho\nu\mu}\bar{\chi}\partial_\nu\bar{\lambda}\xi_\mu F_{\tau\rho} - \frac{i}{2}\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\rho\lambda\xi_\mu F^\mu{}_\rho - \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\tau\rho\alpha}\bar{\lambda}\bar{\sigma}_\alpha\lambda\xi_\mu F_{\tau\rho} + \\
& -iD\partial_\mu\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\chi}\xi_\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\kappa\bar{\chi}\xi_\nu F^\nu{}_\kappa + \frac{i}{4}\epsilon^{\lambda\nu\kappa\rho}\partial_\mu\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\sigma_\rho\bar{\chi}\xi_\lambda F_{\nu\kappa} + \\
& -iM^*\partial_\mu\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\lambda}\xi_\nu - \frac{1}{2}\bar{\chi}\bar{\lambda}\xi_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu} + \frac{i}{4}\bar{\chi}\bar{\lambda}\epsilon^{\tau\rho\nu\alpha}\xi_\alpha\partial_\nu F_{\tau\rho} + \\
& -\frac{1}{2}D^2\bar{\chi}\bar{\psi} + D\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\nu\kappa}\bar{\psi}F_{\nu\kappa} - 2M^*D\bar{\psi}\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\psi\sigma^\tau\bar{\lambda}\xi_\mu F_\tau{}^\mu + \\
& \left. +\frac{1}{4}\epsilon^{\tau\rho\mu\alpha}\psi\sigma_\alpha\bar{\lambda}\xi_\mu F_{\tau\rho} - B\lambda\sigma^\mu\bar{\lambda}\xi_\mu + 4BD\bar{\chi}\bar{\lambda} + h.c. \right\}. \tag{3.45}
\end{aligned}$$

Esta última expressão, sobretudo, parece intratável. Entretanto com o auxílio de varios truques da álgebra espinorial e de aspectos das representações espinorias do grupo de Lorentz, poderemos trazer esta expressão, em termos de espinores de Majorana com 4 componentes, para uma forma muito mais compacta, o que facilitará enormemente as nossas discussões futuras.

Capítulo 4

Fótons, Fotinos e Relações de Dispersão

No Capítulo anterior, vimos as propostas de ações supersimétricas para os setores par e ímpar e sua estrutura detalhada em campos componentes; contudo, faz-se necessário torná-la mais apresentáveis se desejamos ter termos de expressões manipuláveis que nos permitam obter resultados práticos. Neste Capítulo, nossos esforços serão encaminhados no sentido de reduzir os Lagrangeanos obtidos, fazendo escolhas particulares em nosso conjunto de parâmetros livres, priorizando sobretudo aqueles que representam os parceiros supersimétricos dentro do supermultiplete de fundo. Também, discutiremos o procedimento para encontrar as relações de dispersão em cada caso e analisaremos os espectros de massa obtidos. Por último, preparemos o terreno para nosso próximo Capítulo, chegando a ações efetivas para o setor fotônico.

4.1 O Caso CPT-ímpar

Começemos, em primeiro lugar, com o caso CPT-ímpar, que é o mais simples e delineará o método a seguir para os casos complexos. Nosso primeiro passo será reescrever a ação (3.25) em função de espinores de 4-componentes; para

isto definiremos os seguintes 4-espinores: $\bar{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix}$ que descrevera o fotino, e $\bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}$ que representa a componente fermiônica do supermultiplete de fundo, S . Uma vez feita esta reescritura, procederemos à eliminação do campo auxiliar, D , da ação por meio das equações de Euler-Lagrange. Ao fazer isto, eventualmente, teremos produtos de bilineares fermiônicos que serão colocados em uma forma conveniente, utilizando a técnica dos rearranjos de Fierz (ver Apêndice A). Ao seguir o método descrito, nossa ação assume, agora uma forma mais amigável, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}
S_{\text{CPT-ímpar}} = \int d^4x & \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} v_\mu \varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu} F_{\alpha\beta} A_\nu - \frac{i}{2} \bar{\Lambda} \bar{\gamma}^\mu \partial_\mu \Lambda \right. \\
& + \left(\text{Re}(F) + \frac{1}{4} \bar{\Psi} \Psi \right) \bar{\Lambda} \Lambda - i \left(\text{Im}(F) + \frac{1}{4} i \bar{\Psi} \gamma_5 \Psi \right) \bar{\Lambda} \gamma_5 \Lambda \\
& \left. - \frac{1}{4} \left(v_\mu + \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \Psi \right) \left(\bar{\Lambda} \gamma^\mu \gamma_5 \Lambda \right) + \sqrt{2} \bar{\Lambda} \gamma^{\mu\nu} \gamma_5 \Psi F_{\mu\nu} \right]. \quad (4.1)
\end{aligned}$$

Pode-se apreciar, nesta ação, como uma consequência dos rearranjos espinoriais, o aparecimento de bilineares formados pelo campo espinorial de fundo, Ψ , e que, junto ao campo escalar, F , fornece termos tipo-massa para o setor do fotino. Estes bilineares a que acabamos de nos referir serão denominados, de agora em diante, condensados fermiônicos. Serão denotados por:

$$\begin{aligned}
\Theta &= \bar{\Psi} \Psi, \\
\tau &= \bar{\Psi} \gamma_5 \Psi, \\
C^\mu &= \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \Psi.
\end{aligned}$$

Já que Ψ é um espinor de Majorana, podemos mostrar que Θ é um condensado real, que τ é um imaginário puro e que C^μ é um pseudo-vetor com componentes reais. Aliás, em virtude dos rearranjos de Fierz e da natureza Grassmaniana das componentes de Ψ , chegamos às seguintes relações:

$$\Theta^2 = -\tau^2 = -\frac{1}{4} C_\mu C^\mu. \quad (4.2)$$

Tais relações impõem severas restrições sobre nossos condesandos. No seguinte parágrafo, vamos enumerar as suas conseqüências:

- C_μ não pode ser de tipo-espaço, já que $\Theta^2 = -\tau^2 > 0$.
- $C_\mu = 0$ tem como conseqüência que $\Theta = \tau = 0$, de modo que nenhum condesado sobrevive.
- Se $\Theta = \tau = 0$, então C_μ é de tipo-luz.
- Se C_μ é tipo-tempo então $\Theta \neq 0$ e $\tau \neq 0$. Neste caso especial, todos os condesandos contribuem simultaneamente.

Antes de prosseguir, não podemos deixar de apontar como é que a quebra da simetria de Lorentz implica necessariamente no surgimento de uma classe de partículas fermiônicas, os modos de Goldstino. Para esclarecer este fato analisemos a transformação de SUSY do campo de fundo Ψ .

$$\delta\Psi = \partial_\mu(A - B\gamma_5)\gamma^\mu\epsilon + f\epsilon + g\gamma_5\epsilon, \quad (4.3)$$

onde ϵ é o espinor de Majorana que parametriza a transformação, A e B são respectivamente a parte real e imaginária do campo s , e f e g são as partes real e imaginária do campo auxiliar F . A transformação mostra que, mesmo no caso no caso em que $f = g = 0$, a variação $\delta\Psi \neq 0$, já que $\partial_\mu B$ é não trivial (de fato $\partial_\mu B = -\frac{1}{4}v_\mu$), o que identifica um férmion de Goldstone produzido como uma perturbação com respeito ao *background*. Desta forma, a SUSY é quebrada juntamente com a simetria de Lorentz.

Agora que a nossa ação já foi reescrita, vamos acomodar os campos A_μ e Λ em um dubleto, $\Phi = \begin{pmatrix} \Lambda \\ A_\mu \end{pmatrix}$, uma vez que a LSV induz termos bilineares mistos no fóton (A_μ) e no fotino (Λ). Em forma matricial a ação fica:

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} \Phi^t \mathcal{O}_{(CPT\text{-}impar)} \Phi = \int d^4x \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\Lambda}_a & A_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J^{ab} & L^{a\nu} \\ M^{\mu b} & N^{\mu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_b \\ A_\nu \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

onde os blocos do operador $\mathcal{O}_{(CPT\text{-}impar)}$ são:

$$\begin{aligned}
L^{a\nu} &= 2\sqrt{2}(\gamma^{\mu\nu}\gamma_5)^{ab}\Psi\partial_\mu \\
M^{\mu b} &= 2\sqrt{2}\bar{\Psi}(\gamma^{\nu\mu}\gamma_5)^{ab}\partial_\nu \\
J^{ab} &= -i(\gamma^\mu\partial_\mu)^{ab} + (2\text{Re}(F) + \frac{\Theta}{2})\delta^{ab} - i(2\text{Im}(F) + i\frac{\tau}{2})\gamma_5^{ab} - \frac{1}{2}(v_\mu + C_\mu)(\gamma^\mu\gamma_5)^{ab} \\
N^{\mu\nu} &= \square\theta^{\mu\nu} - v_\rho\varepsilon^{\rho\lambda\mu\nu}\partial_\lambda.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Como é conhecido, se desejamos obter os propagadores de nosso modelo o que temos que fazer é calcular a inversa do operador $\mathcal{O}_{(CPT\text{-}impar)}$, porém é aqui que surge uma primeira dificuldade técnica em lidar com a inversão desta supermatriz, com setores bosônicos e elementos fermiônicos. Para realizar esta tarefa procederemos como indicado nas etapas abaixo.

Em geral se o nosso operador de onda, \mathcal{O} , é representado sob a seguinte forma matricial:

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} J & L \\ M & N \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

o operador inverso pode ser escrito como:

$$\mathcal{O}^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ W & Z \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

onde as sub-matrizes X, Y, W e Z são encontradas como segue:

$$\begin{aligned}
X &= (J - LN^{-1}M)^{-1} \\
Y &= J^{-1}LW \\
W &= -N^{-1}MX \\
Z &= (N - MJ^{-1}L)^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Estes blocos podem ser reescritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
X &\equiv (J - LN^{-1}M)^{-1} = (1 - J^{-1}LN^{-1}M)^{-1}J^{-1} \\
Z &\equiv (N - MJ^{-1}L)^{-1} = (1 - N^{-1}MJ^{-1}L)^{-1}N^{-1} \\
Y &\equiv -J^{-1}L(N - MJ^{-1}L)^{-1} = -J^{-1}L(1 - N^{-1}MJ^{-1}L)^{-1}N^{-1} \\
W &\equiv -N^{-1}M(J - LN^{-1}M)^{-1} = -N^{-1}M(1 - J^{-1}LN^{-1}M)^{-1}J^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Lembrando que, para nosso estudo, os blocos X e Z representam, nesta ordem, os propagadores do fotino e fóton, as relações de dispersão para estas partículas são estabelecidas se tomamos:

$$\begin{aligned} \det(J - LN^{-1}M) &= \Delta_{\text{fotino}} = \Delta_F = 0 \\ \det(N - MJ^{-1}L) &= \Delta_{\text{fóton}} = \Delta_B = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Tomemos por exemplo o caso do fotino. O determinante que fornece a sua relação de dispersão é:

$$\det(J - LN^{-1}M) = \det(J) \times \det(1 - J^{-1}LN^{-1}M), \quad (4.11)$$

e, dado que $1 - J^{-1}LN^{-1}M$ é inversível, reduzimos a relação de dispersão a:

$$\det(J) = \Delta_F = 0. \quad (4.12)$$

Seguindo um procedimento similar, para o fóton temos que a relação de dispersão é dada, em forma reduzida, por:

$$\det(N) = \Delta_B = 0. \quad (4.13)$$

Voltando ao nosso caso de estudo, o modelo CPT-ímpar, a relação de dispersão do fotino é dado pelo numerador da matriz inversa J^{-1} , que pode, em sua generalidade, ser escrita como:

$$J^{-1} = A1_{4 \times 4} + B\gamma_5 + R_\mu\gamma^\mu + S_\mu\gamma^\mu\gamma_5 + l_{\mu\nu}, \quad (4.14)$$

e onde os coeficientes são expressos como segue:

$$\begin{aligned}
A &= \left(2\text{Re}(F) + \frac{1}{2}\Theta\right) \left(4|F|^2 + \frac{3}{2}\Theta^2 + 2\delta - p^2 + \frac{v^2}{4} + \frac{1}{2}(v, C)\right) / \Delta_F, \\
B &= i \left(2\text{Im}(F) + \frac{i}{2}\Theta\right) \left(4|F|^2 + \frac{3}{2}\Theta^2 + 2\delta - p^2 + \frac{v^2}{4} + \frac{1}{2}(v, C)\right) / \Delta_F, \\
R_\mu &= \left[\left(\frac{p^2}{2} + \frac{v^2}{8} + \frac{\Theta^2}{4} + \frac{(v, C)}{4} - 2|F|^2 - \delta \right) 2p_\mu - \frac{\{(p, v) + (p, C)\}}{2} (v_\mu + C_\mu) \right] / \Delta_F, \\
S_\mu &= \left[\left(\frac{p^2}{2} + \frac{v^2}{8} + \frac{\Theta^2}{4} + \frac{(v, C)}{4} - 2|F|^2 - \delta \right) (v_\mu + C_\mu) - \{(p, v) + (p, C)\} p_\mu \right] / \Delta_F, \\
l_{\mu\nu} &= \left[-2(2\text{Im}(F) + \frac{i}{2}\tau)(p_\mu v_\nu + p_\nu C_\mu) - (2\text{Re}(F) + \frac{1}{2}\Theta)(p_\alpha v_\beta + p_\alpha C_\beta) \epsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \right] / \Delta_F, \\
\Delta_F &= \left(4|F|^2 + \frac{3}{2}\Theta^2 + 2\delta - p^2 + \frac{v^2}{4} + \frac{1}{2}(v, C) + (p, v) + (p, C)\right) \times \\
&\quad \left(4|F|^2 + \frac{3}{2}\Theta^2 + 2\delta - p^2 + \frac{v^2}{4} + \frac{1}{2}(v, C) - (p, v) - (p, C)\right) + \\
&\quad p^2(v^2 + C^2 + 2(v, C)) \\
&= p^4 - p^2[8|F|^2 + 4\delta - \frac{v^2}{2} - (v, C)] - 2(p, v)(p, C) - (p, v)^2 + \\
&\quad (4|F|^2 + \frac{3}{2}\Theta^2 + 2\delta + \frac{v^2}{4} + \frac{(v, C)}{2})^2 \\
&\text{com} \\
\delta &= \text{Re}(F)\Theta + i\text{Im}(F)\tau
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Mesmo que só precisemos dar a forma de Δ_F , escolhemos mostrar a expressão completa da inversa de J , já que esta será relevante no próximo capítulo, além de que o cálculo formal dos propagadores requer o cálculo desta matriz completa.

No caso do fóton, a relação de dispersão é dado por $\det(N) = 0$; este caso já foi discutido previamente e corresponde à expressão:

$$p^4 + v^2 p^2 - (v \cdot p)^2 = 0. \tag{4.16}$$

Deste modo observa-se que só o campo vetorial de fundo, v_μ , afeta os modos de propagação do fóton. O escalar de fundo, F , e os condensados fermiônicos θ, τ

e C_μ não influenciam os modos de propagação do fóton do tradicional modelo não-supersimétrico de Carroll-Field-Jackiw.

De (4.15) e (4.16) vemos que v_μ é o único parâmetro que aparece tanto na relação de dispersão do fóton como na do fotino. Consideremos o caso particular:

$$\Psi = 0 \text{ e } F = 0, \quad (4.17)$$

devido a esta escolha, todos os condensados fermiônicos são desligados. Nesta particular situação, a relação de dispersão para o fotino lê-se:

$$\Delta_{(\text{fotino})} = p^4 - \frac{1}{2}v^2 p^2 - (v.p)^2 + \frac{1}{4}v^4. \quad (4.18)$$

Aqui, fica claro que um fóton sem massa, que de acordo com (4.18) é caracterizado por $(v.p) = 0$, não é acompanhado por um fotino sem massa, uma vez que $(v.p) = 0$ não é um zero de $\Delta_{(\text{fotino})}$ quando $p^2 = 0$ é considerado. Isto confirma o fato que a quebra da simetria de Lorentz induz uma quebra da SUSY, e que é evidenciada pela separação entre as massas do fóton e o fotino na situação exemplificada. No caso particular em que v^μ é tipo-espaço (ver Klinkhamer [38]), um fóton sem massa é acompanhado por um fotino massivo cuja massa é calculada como sendo:

$$m_{(\text{fotino})} = \frac{1}{2}|\vec{v}|, \quad (4.19)$$

onde \vec{v} é a componente espacial de v^μ . Para esta situação particular, a separação de massas do fóton-fotino é diretamente governada por v^μ .

Por outro lado, se v^μ é nulo e os condensados fermiônicos são todos não-triviais, $p^2 = 0$ é sempre um zero de (4.18) (de modo que um fóton sem massa está presente no espectro para o caso descrito), porém nunca é um zero do $\Delta_{(\text{fotino})}$; desta forma, para este caso particular, um fotino sem massa nunca aparece, o que é, novamente, compatível com o nosso cenário de supersimetria quebrada a partir da LSV.

Finalmente é oportuno mencionar que os blocos M e L que, apesar de não contribuírem aos espectros do fóton e do fotino, são relevantes para o cálculo do propagador do setor fóton-fotino e para a análise dos resíduos dos propagadores

$\langle A_\mu A_\nu \rangle$, $\langle \Lambda_\alpha \Lambda_\beta \rangle$ e $\langle \Lambda_\alpha A_\mu \rangle$ em seus respectivos polos.

4.2 O Caso CPT-par

Agora que já exploramos o método para estudar o espectro de nosso primeiro modelo supersimetrizado, estamos prontos para abordar o caso *CPT – par*, o qual exigirá um tratamento mais detalhado devido à sua complexidade. De fato, já desde o início somos obrigados a fazer escolhas particulares nos parâmetros do supercampo de fundo, Ω , de modo que o Lagrangeano (3.35-3.37) possa ser tratado de forma mais objetiva. Ao proceder deste modo, a escolha na qual S é linear em x^μ ($S = \zeta_\mu x^\mu$, $\zeta_\mu = \text{cte}$), $\partial_\mu \xi = 0$ e $G = 0$ não só é conveniente, como também é compatível com a SUSY e reproduz corretamente o termo k_F .

Uma vez que nossa escolha é implementada no Lagrangeano e, após definir os 4-espinores $Z = (\xi \bar{\xi})$ e $\Lambda = (\lambda \bar{\lambda})$ além de utilizar os rearranjos de Fierz, como fizemos no caso ímpar, chegamos à com a expressão mais simples para ação:

$$S_{\text{bóson}} = \int d^4x \left[D^2(32|G|^2 + 16\partial_\mu S \partial^\mu S^*) + 8iDF^{\mu\nu}(\partial_\mu S \partial_\nu S^* - \partial_\mu S^* \partial_\nu S) \right. \\ \left. - 8F^{\mu\kappa} F_{\kappa}{}^\nu (\partial_\mu S \partial_\nu S^* + \partial_\mu S^* \partial_\nu S) - 4F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \partial_\alpha S \partial_\alpha S^* \right] \quad (4.20a)$$

$$S_{\text{ferm}} = \int dx^4 (C^\mu \bar{\Lambda} \gamma^\nu \gamma_5 \partial_\mu \partial_\nu \Lambda + q C_\mu \bar{\Lambda} \gamma^\mu \gamma_5 \square \Lambda) \quad , \text{ onde: } q = \frac{4 - \sqrt{2}}{16} \quad (4.20b)$$

$$\begin{aligned}
S_{\text{misto}} = \int d^4x \Big[& D \left(10\sqrt{2} \text{Re}(\partial_\mu S) (\bar{Z} \partial_\mu \Lambda) - 8\sqrt{2}i \text{Re}(\partial_\mu S) (\bar{Z} \Sigma^{\mu\nu} \partial_\nu \Lambda) \right. \\
& \left. 8\sqrt{2} \text{Im}(\partial_\mu S) (\bar{Z} \Sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \partial_\nu \Lambda) + 10\sqrt{2}i \text{Im}(\partial_\mu S) (\bar{Z} \gamma_5 \partial^\mu \Lambda) \right) \\
& - 3\sqrt{2} \text{Im}(\partial_\nu S) [\partial_\mu F^{\mu\nu}] \bar{Z} \Lambda + 3\sqrt{2} \text{Re}(\partial_\nu S) [\partial_\mu F^{\mu\nu}] \bar{Z} \gamma_5 \Lambda + \\
& 4\sqrt{2}i \partial_{[\nu} F_{\mu]\alpha} \text{Im}(\partial^\alpha S) \bar{Z} \Sigma^{\mu\nu} \Lambda + 4\sqrt{2}i \partial_{[\nu} \tilde{F}_{\mu]\alpha} \text{Re}(\partial^\alpha S) \bar{Z} \Sigma^{\mu\nu} \Lambda + \\
& \left. 4\sqrt{2} \partial_{[\nu} F_{\mu]\alpha} \text{Im}(\partial^\alpha S) \bar{Z} \Sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \Lambda + 4\sqrt{2} \partial_{[\nu} \tilde{F}_{\mu]\alpha} \text{Re}(\partial^\alpha S) \bar{Z} \Sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \Lambda \right].
\end{aligned} \tag{4.20c}$$

Para completar nossa simplificação, devemos eliminar o campo auxiliar, D ; contudo não devemos nos esquecer que nosso Lagrangeano só descreve o termo supersimetrizado- k_F ; portanto, antes de prosseguir, é necessário adicionar a superação de Maxwell. Com isto, a ação total que incorpora todos os termos é da forma:

$$S_{\text{CPT-par}}^{(total)} = S_{\text{Maxwell}}^{(susy)} + S_{\text{CPT-par}}^{(susy)} = S + \int d^4x \beta D + \int d^4x \alpha D^2. \tag{4.21}$$

Eliminando, então, o campo auxiliar, chegamos a

$$S_{\text{CPT-par}}^{(total)} = S - \int dx^4 \frac{\beta^2}{4(2 + \alpha)}, \tag{4.22}$$

onde S denota a parte da ação que não tinha dependência em D , α e β são expressos em termos das componentes de fundo e dos campos do setor de gauge como se mostra a seguir :

$$\begin{aligned}
\alpha &= 16(\partial_\kappa S \partial^\kappa S^*), \\
\beta &= 16 m_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 10\sqrt{2} \text{Re}(\partial_\mu S) (\bar{Z} \partial_\mu \Lambda) - 8\sqrt{2}i \text{Re}(\partial_\mu S) (\bar{Z} \Sigma^{\mu\nu} \partial_\nu \Lambda) + \\
& \quad 8\sqrt{2} \text{Im}(\partial_\mu S) (\bar{Z} \Sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \partial_\nu \Lambda) + 10\sqrt{2}i \text{Im}(\partial_\mu S) (\bar{Z} \gamma_5 \partial^\mu \Lambda),
\end{aligned} \tag{4.23}$$

onde $m_{\mu\nu} = \text{Re}(\partial_\mu S) \text{Im}(\partial_\nu S) - \text{Re}(\partial_\nu S) \text{Im}(\partial_\mu S)$.

O cálculo de β^2 novamente requer o uso dos rearranjos de Fierz e das propriedades dos bilineares formados pelos espinores anticomutantes de Majorana. Neste caso, os condensados fermiônicos são definidos de forma similar:

$$\begin{aligned}\Theta &= \bar{Z}Z \\ \tau &= \bar{Z}\gamma_5 Z \\ C^\mu &= \bar{Z}\gamma^\mu\gamma_5 Z,\end{aligned}$$

com a diferença de que, agora, a dimensão de $[\Theta] = M^{-1}$. Assim, encontramos que a forma final para β^2 é a seguinte:

$$\begin{aligned}\beta^2 &= \bar{\Lambda}\left(\tilde{a} + \tilde{b}\gamma_5 + \tilde{w}^\rho\gamma_\rho\gamma_5\right)\Lambda + \\ &16m_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\left[10\sqrt{2}Re(\partial_\mu S)(\bar{Z}\partial^\mu\Lambda) - 8\sqrt{2}iRe(\partial_\mu S)(\bar{Z}\Sigma^{\mu\nu}\partial_\nu\Lambda) + \right. \\ &+ 8\sqrt{2}Im(\partial_\mu S)(\bar{Z}\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\partial_\nu\Lambda) + 10\sqrt{2}iIm(\partial_\mu S)(\bar{Z}\gamma_5\partial^\mu\Lambda)\left. \right] \\ &+ 256m_{\mu\nu}m_{\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta},\end{aligned}\tag{4.24}$$

onde os operadores diferenciais \tilde{a} , \tilde{b} e \tilde{w}^ρ são definidos como:

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= 42\Theta s^{\alpha\beta}\square\omega_{\alpha\beta} + 84i\tau Re(\partial^\alpha S)Im(\partial^\beta S)\square\omega_{\alpha\beta} + 8\Theta s\square + \\ &16i\tau Re(\partial_\rho S)Im(\partial^\rho S)\square,\end{aligned}\tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}\tilde{b} &= 42\tau s^{\alpha\beta}\square\omega_{\alpha\beta} + 84i\Theta Re(\partial^\alpha S)Im(\partial^\beta S)\square\omega_{\alpha\beta} + 8\tau s\square + \\ &16i\Theta Re(\partial_\rho S)Im(\partial^\rho S)\square,\end{aligned}\tag{4.26}$$

$$\tilde{w}^\rho = -4(1 + 8\partial_\kappa S\partial^\kappa S^*)C_\alpha d^{\alpha\rho},\tag{4.27}$$

sendo

$$\begin{aligned}d^{\alpha\rho} &= \frac{-1}{4(1 + 8\partial_\kappa S\partial^\kappa S^*)} \times \left[-50\eta^{\rho\alpha}t^{\mu\nu}\square\omega_{\mu\nu} + 40t_\kappa^\alpha(\eta^{\beta\alpha}\eta^{\kappa\rho} - \eta^{\kappa\alpha}\eta^{\beta\rho})\square\omega_{\alpha\beta} + \right. \\ &+ 40[Im(\partial^\mu S)Re(\partial^\nu S) - Re(\partial^\mu S)Im(\partial^\nu S)]\eta^{\kappa\alpha}\epsilon_{\kappa\nu}{}^{\beta\rho}\square\omega_{\mu\beta} + \\ &+ 8\delta_\kappa^\alpha(r^{\kappa\rho\mu\nu} + u^{\kappa\mu\nu\rho})\square\omega_{\mu\nu}\left. \right],\end{aligned}\tag{4.28}$$

Para chegarmos a última linha usamos:

$$r^{\theta\alpha\beta\rho} = (\eta^{\theta\alpha}\epsilon^{\nu\mu\beta\rho} + \eta^{\rho\alpha}\epsilon^{\nu\mu\beta\theta} + \eta^{\rho\beta}\epsilon^{\nu\mu\alpha\theta} + \eta^{\theta\beta}\epsilon^{\nu\mu\alpha\rho})Re(\partial_\nu S)Im(\partial_\mu S), \quad (4.29)$$

$$u^{\theta\rho\alpha\beta} = 2t^{\theta\rho}\eta^{\alpha\beta} - 2t^{\theta\alpha}\eta^{\beta\rho} - 2t^{\beta\rho}\eta^{\theta\alpha} + t^{\alpha\beta}\eta^{\theta\rho} + t(2\eta^{\theta\alpha}\eta^{\beta\rho} - \eta^{\alpha\beta}\eta^{\theta\rho}), \quad (4.30)$$

$$s_{\alpha\beta} = Im(\partial_\alpha S)Im(\partial_\beta S) - Re(\partial_\alpha S)Re(\partial_\beta S), \quad (4.31)$$

$$t_{\alpha\beta} = Im(\partial_\alpha S)Im(\partial_\beta S) + Re(\partial_\alpha S)Re(\partial_\beta S), \quad (4.32)$$

$$t = \eta^{\alpha\beta}t_{\alpha\beta}, \quad (4.33)$$

$$s = \eta^{\alpha\beta}s_{\alpha\beta}, \quad (4.34)$$

$$\theta_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} - \frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\square}, \quad (4.35)$$

e

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\square}, \quad (4.36)$$

sendo $\theta_{\alpha\beta}$ e $\omega_{\alpha\beta}$ os usuais operadores de projeção transverso e longitudinal.

Finalmente incorporando o termo β^2 na ação, obtem-se:

$$\begin{aligned} S^{(\text{full})} = \int dx^4 & \left[-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + K_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} - \frac{64}{(1 + 8\partial_\rho S\partial^\rho S^*)}m_{\mu\nu}m_{\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} \right. \\ & - \bar{\Lambda}\frac{\tilde{a}}{4(1 + 8\partial_\kappa S\partial^\kappa S^*)}\Lambda - \bar{\Lambda}\frac{\tilde{b}}{4(1 + 8\partial_\kappa S\partial^\kappa S^*)}\gamma_5\Lambda + \\ & \left. \bar{\Lambda}\left[-(C, \partial)\partial_\mu + q\square C_\mu + C^\alpha d_{\alpha\mu}\right]\gamma^\mu\gamma_5\Lambda + 2\bar{Z}N\Lambda \right]. \quad (4.37) \end{aligned}$$

Analisemos de perto a matriz, N , que realiza o acoplamento do fóton (A_μ) ao

fotino (Λ) :

$$N = I^{(1)} + iI^{(2)}\gamma_5 + iI_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}, \quad (4.38a)$$

com:

$$I^{(1)} = -\frac{3}{2}\sqrt{2}Im(\partial_\mu S)\partial_\alpha F^{\alpha\mu} + \frac{20\sqrt{2}}{(1+8\partial_\kappa S\partial^\kappa S^*)}m_{\alpha\beta}Re(\partial_\rho S)\partial^\rho F^{\alpha\beta}, \quad (4.38b)$$

$$I^{(2)} = \frac{3}{2}\sqrt{2}Re(\partial_\mu S)\partial_\alpha F^{\alpha\mu} + \frac{20\sqrt{2}i}{(1+8\partial_\kappa S\partial^\kappa S^*)}m_{\alpha\beta}Im(\partial_\rho S)\partial^\rho F^{\alpha\beta}, \quad (4.38c)$$

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu} = & 2\sqrt{2}\left[Im(\partial^\alpha S)\partial_{[\nu}F_{\mu]\alpha} + Re(\partial^\alpha S)\partial_{[\nu}\tilde{F}_{\mu]\alpha}\right] - \\ & - \frac{16\sqrt{2}}{(1+8\partial_\kappa S\partial^\kappa S^*)}m_{\alpha\beta}Re(\partial_\mu S)\partial_\nu F^{\alpha\beta} \\ & \sqrt{2}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\left[Re(\partial_\rho S)\partial^\alpha\tilde{F}^{\beta\rho} - Im(\partial_\rho S)\partial^\alpha\tilde{F}^{\beta\rho}\right] \\ & - \frac{8\sqrt{2}}{(1+8\partial_\kappa S\partial^\kappa S^*)}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}m_{\theta\lambda}Re(\partial^\alpha S)\partial^\beta F^{\theta\lambda}. \end{aligned} \quad (4.38d)$$

Chamamos a atenção para o fato de que o termo misto $A^\mu - \Lambda$ aparece na forma $\bar{Z}N\Lambda$; a matriz N é escrita em termos das matrizes 1 , γ_5 e $\Sigma_{\mu\nu}$, e os coeficientes $I^{(1)}$, $I^{(2)}$, $I_{\mu\nu}$ contêm termos do campo de fundo S (através de $\partial_\mu S$) e da intensidade de campo $F_{\mu\nu}$. De forma global, o termo $\bar{Z}N\Lambda$ é quadrático nas componentes de fundo e quadrático (mas não-diagonal) nos graus de liberdade do setor de gauge (A^μ e Λ).

A este ponto, estamos prontos para calcular as relações de dispersão do modelo ímpar. Seguindo os mesmos passos que no caso anterior, vamos expressar (4.37) em forma matricial:

$$S_{\text{CPT-par}}^{(total)} = \frac{1}{2} \int dx^4 \bar{\Psi} \mathcal{O}_{\text{CPT-par}} \Psi, \quad (4.39)$$

onde o operador matricial $\mathcal{O}_{\text{CPT-par}}$ é dado por:

$$\mathcal{O}_{\text{CPT-par}} = \begin{pmatrix} M & N' \\ N' & Q \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

com as sub-matrices dadas como se mostra abaixo:

$$M = -\frac{\tilde{a}}{4(1 + 8\partial_\kappa S \partial^\kappa S^*)} 1_{4 \times 4} - \frac{\tilde{b}}{4(1 + 8\partial_\kappa S \partial^\kappa S^*)} \gamma_5 +$$

$$-\frac{p^\mu}{2} \gamma_\mu + \left((p, C)p_\mu - qp^2 C_\mu + C^\alpha d_{\alpha\mu} \right) \gamma^\mu \gamma_5 \quad (4.41a)$$

$$Q_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \square \theta_{\mu\nu} + (J_{\mu\alpha\beta\nu} - J_{\mu\alpha\nu\beta} + J_{\alpha\mu\nu\beta} - J_{\alpha\mu\beta\nu}) \square \omega^{\alpha\beta}$$

onde (4.41b)

$$J_{\mu\alpha\beta\nu} = K_{\mu\alpha\beta\nu} - \frac{64}{(1 + 8\partial_\rho S \partial^\rho S^*)} m_{\mu\alpha} m_{\beta\nu} \quad (4.41c)$$

Notemos que, diferentemente do caso ímpar, a eliminação do campo auxiliar, D , fornece uma nova contribuição para o tensor que quebra a simetria de Lorentz, $K_{\mu\nu\alpha\beta}$, e que fica expressa a traves do tensor $J_{\mu\nu\alpha\beta}$. Porém, este termo adicional é de quarta ordem nas potências dos campos componentes $\partial_\mu S$, que, como será discutido em breve, não representa uma contribuição relevante, e pode ser desconsiderado para a aproximação de primeira ordem. Por outro lado, podemos ter uma postura diferente e fazer a exigência de que o tensor $K_{\mu\nu\alpha\beta}$ deva permanecer inalterado e manter sua forma original; assim, somos obrigados a anular a nova contibuição, o que implica em zerar o tensor $m_{\mu\nu}$. Se adotamos esta postura, temos uma justificativa para fazer uma imposição sobre a realidade do gradiente do campo S . A título de comparação, devemos nos lembrar que, no caso ímpar, o gradiente de S foi escolhido como sendo imaginário puro a fim de reproduzir o termo de Carroll-Field-Jackiw, enquanto que, no caso par, nenhuma restrição é exigida sobre $\partial_\mu S$ a não ser que tenha valor constante.

Resumindo: da mesma forma que no caso ímpar, temos que exigir uma relação para as partes real e imaginária do gradiente do campo de fundo S . As possibilidades que temos são fazer zero o valor da parte imaginária, ou da parte real, ou fazer zero a combinação $m_{\mu\nu} = 0$.

Um procedimento convencional consistiria em calcular explicitamente a inversa do operador de onda, \mathcal{O}^{-1} , para obter os propagadores $\bar{\Lambda}$, ΛA_μ e $A_\mu A_\nu$

cuja estrutura de polos corresponde às relações de dispersão. No entanto, se só estamos interessados nas relações de dispersão para o fóton e o fotino, temos que considerar apenas as matrizes M and Q , como já discutido previamente. Portanto, os polos dos setores do fóton e o fotino são os zeros das equações $\det Q = 0$ and $\det N = 0$, respetivamente.

O propagador do fotino corresponde à matriz inversa M^{-1} , cuja estrutura de polos é dada no $\det M$:

$$M^{-1} = A + B\gamma_5 + v_\theta\gamma^\theta + \omega_\theta\gamma^\theta\gamma_5, \quad (4.42)$$

cujos coeficientes lêem-se:

$$A = \frac{\tilde{a}p^2}{16(1 + 8\partial_\kappa S\partial^\kappa S^*)\Delta_F} \quad (4.43a)$$

$$B = -\frac{\tilde{b}p^2}{16(1 + 8\partial_\kappa S\partial^\kappa S^*)\Delta_F} \quad (4.43b)$$

$$v_\mu = \left[\frac{\tilde{a}^2 - \tilde{b}^2}{16(1 + 8\partial_\kappa S\partial^\kappa S^*)^2} - \frac{p^2}{4} - \tilde{w}^2 \right] \frac{p_\mu}{2\Delta_F} + \frac{(\tilde{w}, p)\tilde{w}_\mu}{\Delta_F} \quad (4.43c)$$

$$\omega_\mu = (1 - q)p^2(p, C)\frac{p_\mu}{2\Delta_F} + (C^\alpha p^\beta d_{\alpha\beta})\frac{p_\mu}{2\Delta_F} - \frac{p^2}{4\Delta_F} \left[(p, C)p_\mu - qp^2C_\mu + C^\alpha d_{\alpha\mu} \right], \quad (4.43d)$$

e o denominador, Δ_F , que aparece em cada um destes termos é da forma:

$$\Delta_F = \frac{p^4}{16} - (p, \tilde{w})^2 - \frac{p^2\tilde{a}^2}{32(1 + 8k\partial_\kappa S\partial^\kappa S^*)^2} + \frac{p^2\tilde{b}^2}{32(1 + 8k\partial_\kappa S\partial^\kappa S^*)^2} + \frac{p^2}{2}\tilde{w}^2. \quad (4.43e)$$

Podemos separar o denominador Δ_F em duas partes: a primeira formada por termos até segunda ordem nas potências de $\partial_\mu S$, e o segundo termo exclusivamente

com potências mais altas em $\partial_\mu S$:

$$\Delta_F = p^4 \Theta^2 \tilde{\Delta} = p^4 \Theta^2 \left(\frac{1}{16\Theta^2} + [C^{(1)} p^2 + C_{\mu\nu}^{(2)} p^\mu p^\nu] + \mathcal{O}(3) \right), \quad (4.44a)$$

onde

$$C^{(1)} = (q^2 - q - \frac{1}{2}) + \left[\frac{1}{(1 + 8\partial_\mu S \partial^\mu S^*)} \right] (4q - 2)(\eta_{\mu\nu} t^{\mu\nu}) \quad (4.44b)$$

$$aC_{\mu\nu}^{(2)} = \left[\frac{1}{2(1 + 8\partial_\mu S \partial^\mu S^*)} \right] [42q - 29] t_{\mu\nu}. \quad (4.44c)$$

O motivo desta divisão não é arbitrário. Já sabemos que os parâmetros que realizam a quebra da simetria de Lorentz são muitos pequenos; portanto, se em nossas relações aparecem termos que são muito menores que os ditos parâmetros, podemos em boa aproximação, desconsiderá-los.

Lembrando que nosso parâmetro para a LSV, o tensor $K_{\mu\nu\alpha\beta}$, é uma combinação linear de bilineares em $\partial_\mu S$, este é de segunda ordem, logo os termos de $\mathcal{O}(3)$ ou maiores na Eq.(4.44) podem ser descartados. Também devemos notar que o coeficiente $C_{\mu\nu}^{(2)}$ é muito menor que $C^{(1)}$, pois $|t_{\mu\nu}| \ll 1$; portanto, para esta aproximação, é possível remover o termo que mistura os momenta e encontrar uma relação de dispersão simples para o fotino, dada por:

$$\Delta_F^{(\text{aprox})} = C^{(1)} \Theta^2 p^4 (p^2 - m^2) = 0, \quad (4.45)$$

com

$$m_{(\text{fotino})}^2 = -\frac{1}{16\Theta^2 C^{(1)}}. \quad (4.46)$$

Notemos que $C^{(1)}$ é negativo e que esta relação é uma boa aproximação, porém não é exata, levando em conta todas as ordens nos parâmetros da quebra. Vale a pena ter esta limitação em mente.

Aqui, ao contrário do modelo ímpar, a massa do fotino mostra uma dependência explícita no condesando Θ (tem dimensão de massa⁻¹;), aliás, lembrando os limites experimentais para as componentes de k_F (e portanto para o vector ξ_μ) e

o valor de $C^{(1)}$ na Eq.(4.44) podemos ver, de fato, que só o condensado fermiônico fixa a massa do fotino.

Assim, para um fotino na escala TeV, o condensado Θ é estimado ser de ordem $\mathcal{O}(\text{TeV}^{-1})$ que corresponde a uma longitude de onda na escala sub-milimétrica. Este resultado deve ser mais explorado, já que poderia apontar a uma quebra de SUSY em regimes de energia dos aceleradores. É uma promissora perspectiva.

Por outro lado, a relação de dispersão do fóton é similar ao caso não-supersimétrico:

$$p_{\pm}^0 = (1 + \rho \pm \sigma)|\bar{p}|, \quad (4.47)$$

onde $\rho = \frac{1}{2}\tilde{K}_{\alpha}^{\alpha}$ and $\sigma^2 = \frac{1}{2}(\tilde{K}_{\alpha\beta})^2 - \rho^2$, with $\tilde{K}^{\alpha\beta} = K^{\alpha\beta\mu\nu}\hat{p}_{\mu}\hat{p}_{\nu}$ and $\hat{p}^{\mu} = p^{\mu}/|\bar{p}|$.

Notemos que, como no caso ímpar, a relação de dispersão do fóton não é modificada pela presença de parceiros supersimétricos. Este é um aspecto que merece uma maior reflexão.

4.3 Ações Efetivas

Nesta Seção vamos calcular as ações efetivas que resultam após se integrar o campo fermiônico para os casos estudados ???. Para isto, eliminaremos os termos que misturam os campos $A_{\mu} - \Psi$ por meio de redefinições consistentes no campo do fotino que diagonalizem os operadores $\mathcal{O}_{\text{CPT-par}}$ e $\mathcal{O}_{\text{CPT-impar}}$.

A forma de como é escolhida esta redefinição segue de uma simples inspeção de nossos Lagrangeanos. Como já é costume, trabalharemos primeiro o caso ímpar, onde serão mostrados os detalhes de nosso procedimento.

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}v_\mu\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}A_\nu + \frac{1}{2}\bar{\Lambda}J\Lambda + \sqrt{2}\bar{\Lambda}\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\Psi F_{\mu\nu} \right],$$

esta ação pode ser reescrita como:

$$= \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}v_\mu\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}A_\nu + \frac{1}{2}\bar{\Lambda}J\left(\Lambda + J^{-1}\sqrt{2}\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\Psi F_{\mu\nu}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\Lambda}\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\Psi F_{\mu\nu} \right]$$

o qual nos induz a escolher a seguinte redefinição para o campo fermiônico:

$$\begin{aligned} \Upsilon &= \Lambda + J^{-1}\sqrt{2}\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\Psi F_{\mu\nu}, \\ \bar{\Upsilon} &= \bar{\Lambda} - \sqrt{2}\bar{\Psi}\gamma_5\Sigma^{\mu\nu}\bar{J}^{-1}F_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Substituindo-se estes novos campos chegamos a:

$$\begin{aligned} &= \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}v_\mu\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}A_\nu + \frac{1}{2}\left(\bar{\Upsilon} + \sqrt{2}\bar{\Psi}\gamma_5\Sigma^{\mu\nu}\bar{J}^{-1}F_{\mu\nu}\right)J\Upsilon + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\Lambda}\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\left(\Upsilon - J^{-1}\sqrt{2}\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5F_{\mu\nu}\right)\Psi F_{\mu\nu} \right] \\ &= \frac{1}{2}\bar{\Upsilon}J\Upsilon - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}v_\mu\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}A_\nu + F_{\mu\nu}\left(\bar{\Psi}\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5J^{-1}\Sigma^{\alpha\beta}\gamma_5\Psi\right)F_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Aqui, observamos a não-localidade presente na redefinição do campo Υ ; porém já que se integrará o mesmo para eliminarmos o termo de mistura, a redefinição é admissível. Também observamos a formação de um condensado fermiônico (e que a mesmo tempo é um operador) cujo cálculo requer o uso da algebra das matrizes γ^μ . O cálculo deste condensado (ver Apêndice B para detalhes) lava-nos

à seguinte ação efetiva:

$$\begin{aligned}
S_{\text{fóton-ímpar}}^{(efetivo)} = \int d^4x & \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}v_\mu\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}A_\nu + \right. \\
& + F_{\mu\nu}\left(\frac{1}{4}\Theta A + \frac{1}{4}\tau B + \frac{1}{2}C_\rho S^\rho\right)F^{\mu\nu} + F_{\mu\lambda}(2C^\mu S_\nu)F^{\rho\lambda} + \\
& \left. + F_{\mu\nu}\left(\frac{i}{4}\tau A + \frac{i}{4}\Theta B\right)\tilde{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tau F_{\mu\lambda}l_\nu^\lambda\tilde{F}^{\mu\nu}\right], \quad (4.49)
\end{aligned}$$

onde os coeficientes A, B, S_μ e $l_{\mu\nu}$ estão dados em (4.15).

Destacamos aqui que a supersimetrização do modelo de Carroll-Field-Jackiw induz o aparecimento de termos axiônicos, $F\tilde{F}$, que quebram a simetria CP, fato que, como se verá em breve, é exclusivo deste caso.

O caso par segue um procedimento similar, onde, para desacoplar os campos, utilizamos a seguinte redefinição para o fóton: $\Upsilon = \Lambda + M^{-1}\tilde{N}Z$. Assim, após se fazer a substituição, a ação efetiva assume a forma:

$$\begin{aligned}
S_{\text{fóton-par}}^{(efetivo)} & = \int d^4x \left[L_{\text{fóton-par}}^{(antigo)} - \bar{Z}(NM^{-1}\tilde{N})Z \right] \\
& = \int d^4x \left[L_{\text{fóton-par}}^{(antigo)} - (I^{(1)}I^{(1)} - I^{(2)}I^{(2)} + \frac{1}{2}I_{\mu\nu}I^{\mu\nu})(A\Theta + B\tau) - \right. \\
& \quad \left. i(2I^{(1)}I^{(2)} - \frac{1}{2}I_{\mu\nu}\tilde{I}^{\mu\nu})(A\tau + B\Theta) + (I^{(1)}I^{(1)} + I^{(2)}I^{(2)})\omega_\rho C^\rho \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2}I_{\mu\nu}I^{\mu\nu}\omega_\rho C^\rho + 2I^{(1)}I^{\kappa\rho}\omega_\kappa C_\rho - 2I^{(2)}\tilde{I}^{\kappa\rho}\omega_\kappa C_\rho \right]. \quad (4.50)
\end{aligned}$$

Na última expressão, $L_{\text{fóton-par}}^{(antigo)}$, denota os termos puramente fotônicos da Eq. (37); além disto, os coeficientes A, B e ω_μ são definidos em (4.43). Finalmente, $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{\mu\nu}$ e o dual $\tilde{I}^{\mu\nu}$ são os coeficientes da matriz N , que é dada na Eq. (4.38)

Ao contrário do caso ímpar, todos os termos da ação efetiva, exceto $L_{\text{fóton-par}}^{(antigo)}$, estão multiplicados por termos que são quadráticos nos coeficientes I o que resulta na aparição de termos de $\mathcal{O}(3)[\partial_\mu S]$ ou superiores e que, conforme nossos critérios de aproximação, podem ser ignorados. Logo, a ação reduzida simplifica-se para

a expressão (no espaço dos momenta):

$$\begin{aligned}
S_{\text{fóton-par}}^{(efetivo)} = & \int d^4p \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 16 t_{\mu\nu} F^{\mu\kappa} F_{\kappa}{}^{\nu} - 4 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} (t_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta}) \right. \\
& \frac{1}{\tilde{\Delta}} \left(\frac{y}{4} - \frac{1}{8} \right) t_{\rho\lambda} \left(4 p^2 F_{\mu}{}^{\rho} F^{\mu\lambda} - \eta^{\rho\lambda} p^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) + \\
& \left. \frac{1}{\tilde{\Delta}} \left(\frac{5y}{8} + \frac{13}{16} \right) t_{\rho\lambda} \left(p_{\mu} p_{\nu} F^{\mu\rho} F^{\nu\lambda} \right) \right], \tag{4.51}
\end{aligned}$$

com $\tilde{\Delta}$ definido pela Eq. (43)

Observamos aqui um aspecto comum a ambos os modelos: a presença de termos $\partial F \cdot \partial F$ como os termos que possuem as derivadas mais altas; portanto, eles são igualmente sensíveis na escalas de altas frequências. Fica como objeto de futura investigação, o estudo da birrefringência a partir de ações fotônicas efetivas dos casos par e ímpar, como uma forma esperada de se encontrar peculiaridades específicas de um ou outro caso no setor puramente fotônico. Este ponto será encaminhado para futura análise.

No próximo Capítulo, exploraremos um pouco mais as consequências das ações efetivas calculadas, focalizando nossa atenção no caso estático e calculando o potencial de interação entre duas cargas opostas.

Capítulo 5

Potenciais Inter-partícula

Neste Capítulo final, trabalharemos a energia de interação do ponto-de-vista do formalismo das variáveis invariantes de gauge. Para isto, calcularemos o valor esperado do operador Hamiltoniano, H , no estado físico $|\Phi\rangle$, que descreve as fontes. A construção das quantidades H e $|\Phi\rangle$ será o tema de discussão das seções deste Capítulo.

5.1 Formalismo invariante de gauge

A física moderna das partículas elementares é fortemente sedimentada sobre as teorias de gauge. As equações de campo para estas teorias são invariantes perante transformações de gauge. Pelo princípio de invariância de gauge, todas as grandezas físicas devem ser independentes do gauge utilizado. Por exemplo, os potenciais eletromagnéticos, A_μ , são definidos a menos um gradiente de uma função arbitrária, mas o tensor intensidade de campo eletromagnético é um observável físico e é invariante de gauge. Em uma teoria de gauge quântica, espera-se que todas as variáveis dinâmicas observáveis sejam invariantes de gauge. Na eletrodinâmica, o campo carregado, $\psi(x)$, não cumpre este requisito pois altera sua fase sob uma transformação de gauge, $\psi' = \exp(ie\alpha(x))\psi$, sendo α arbitrário.

Quem primeiro se dedicou a contruir um campo equivalente a ψ , mas que seja invariante de gauge, foi Dirac, que mostrou [54] que o campo composto

$$\Psi(x) = \exp \left[-\frac{iq}{h} \int d^4z c^\mu(x, z) A_\mu(z) \right] \psi(x), \quad (5.1)$$

é uma variável invariante de gauge sempre que o coeficiente c^μ satisfazer a condição:

$$\partial_\mu c^\mu(x, x') = \delta^4(x - x'). \quad (5.2)$$

Dado que a solução desta equação não é única, existem tantas descrições invariantes de gauge quantas forem as funções c^μ que verificam Eq.(5.2). Uma solução de especial interesse é aquela denominada de *ansatz* da corda:

$$\Psi(x) = \exp \left[-\frac{iq}{h} \int_{\mathcal{C}-\xi x} dz^\mu A_\mu(z) \right] \psi(x), \quad (5.3)$$

onde o argumento da exponencial é, agora, uma integral de linha sobre o contorno, \mathcal{C} , que é um caminho que une um ponto fixo, ξ , a x . Daqui podemos ver q este *ansatz* translada a dependência de gauge a uma dependência na escolha particular do contorno \mathcal{C} .

Esta relação entre a escolha do gauge e o contorno de integração vem sendo estudada nas Ref.[55]. Tomando \mathcal{C} como uma linha reta, pode-se mostrar as seguintes equivalências:

- Se \mathcal{C} é parametrizado por uma reta, $z = \xi + \alpha(x - \xi)$, com $\alpha \in [0, 1]$ obtemos o gauge de Fock-Schwinger [56]: $(x^\mu - \xi^\mu) A_\mu = 0$.
- Se \mathcal{C} é parametrizado por uma reta tipo-espaço, $\vec{z} = \vec{\xi} + \alpha(\vec{x} - \vec{\xi})$, com $\alpha \in [0, 1]$ e $\xi_0 = x_0 = \text{cte}$, obtemos o gauge de Poincaré.
- Se \mathcal{C} é parametrizado por uma reta tipo-tempo, $z_0 = \xi_0 + \alpha(x_0 - \xi_0)$, com $\alpha \in [0, 1]$ e $\vec{\xi} = \vec{x} = \text{cte}$, obtemos o gauge temporal.
- Se \mathcal{C} é parametrizado por uma reta onde o ponto ξ é tomado no infinito e $z = x + \alpha n$, com $\alpha \in \langle -\infty, 0 \rangle$ e n sendo um vetor unitario, obtemos o gauge axial.

No que se segue, trabalharemos utilizando um contorno de integração retilíneo tipo-espaço, de modo que a integral de linha na exponencial torna-se:

$$\int_{C-\xi x} dz^\mu A_\mu(z) = \int_\xi^x dz^i A_i(z) = \int_0^1 d\alpha z^i A_i(\alpha\vec{x} - \alpha\vec{\xi}). \quad (5.4)$$

Passemos, agora, a discutir a interpretação do operador invariante de gauge, Ψ . Seja $|E\rangle$ um auto-estado do operador de campo elétrico, $E^i(x)$, com autovalor $\varepsilon^i(x)$, de modo que $E^i(x)|E\rangle = \varepsilon^i(x)|E\rangle$; a ação que realiza Ψ no estado $|E\rangle$ pode ser derivada a partir de :

$$\begin{aligned} E^i(x)\Psi(y)|E\rangle &= \Psi(y)E^i(x)|E\rangle + [E^i(x), \Psi(y)]|E\rangle, \\ &= \left(\varepsilon^i(x) + q \int_0^1 d\alpha y^i \delta^{(3)}(\alpha\vec{y} - \vec{x}) \right) \Psi(y)|E\rangle, \end{aligned}$$

onde o comutador entre os campos E^i e Ψ é calculado em [55]. Assim, podemos ver que o operador $\Psi(x)$ fornece uma contribuição ao campo elétrico. Isto se interpreta dizendo que o operador $\Psi(x)$ é responsável pela criação de um férmion envolto por uma nuvem de campos de gauge. Na literatura, isto é chamado de matéria vestida.

Para este caso específico, vemos que o elétron é acompanhado por um campo elétrico estático restrito a uma linha (tubo) , já que a integral não é nula só no contorno de integração.

Outro exemplo é aquele proposto por Dirac, onde se escolheu uma solução esfericamente simétrica para o coeficiente c^μ na Eq.(5.2), de modo que o invariante de gauge Ψ assume a forma:

$$\Psi(x) = \exp \left[-\frac{iq}{\hbar} \frac{\partial^i A_i}{\nabla^2} \right] \psi(x), \quad (5.5)$$

encontrado-se que:

$$E^i(x)\Psi(y)|E\rangle = \left(\varepsilon^i(x) - \frac{q}{4\pi} \frac{x^i - y^i}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \Psi(y)|E\rangle,$$

que representa a criação de um elétron acompanhado por um campo elétrico Coulombiano.

Finalmente, um estado interessante para nos é aquele formado por um par de cargas opostas (férmion-antiférmion), onde o primeiro se encontra na posição \vec{y}' e o segundo na posição \vec{y} . Este estado é construído da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
|\Phi\rangle &\equiv \bar{\Psi}(\vec{y})\Psi(\vec{y}')|0\rangle, \\
&= \bar{\psi}(\mathbf{y}) \exp\left[\frac{iq}{\hbar} \int_{\xi}^{\mathbf{y}} dz^i A_i(z) - \frac{iq}{\hbar} \int_{\xi}^{\mathbf{y}'} dz^i A_i(z)\right] \psi(\vec{y}')|0\rangle, \\
&= \bar{\psi}(\mathbf{y}) \exp\left[\frac{iq}{\hbar} \int_{\mathbf{y}'}^{\mathbf{y}} dz^i A_i(z)\right] \psi(\vec{y}')|0\rangle,
\end{aligned}
\tag{5.6}$$

onde $|0\rangle$ é o estado físico do vácuo e a integral de linha é calculada ao longo de um caminho tipo-espaco que conecta o ponto inicial, \vec{y} , ao ponto final \vec{y}' . Este estado é o que será utilizado para calcular a energia de interação entre duas cargas estáticas.

5.2 Hamiltonianos Estendidos

Nesta Seção nosso propósito será implementar o método desenvolvido por Dirac para sistemas com vínculos. Construiremos os Hamiltonianos canônicos associados aos Lagrangeanos efetivos discutidos no Capítulo anterior, encontraremos os vínculos secundários da teoria, eliminaremos os graus de liberdade não-físicos mediante uma fixação de gauge e, finalmente, calcularemos os colchetes de Dirac. Antes de iniciar, será conveniente fazer algumas considerações; em primeiro lugar, devemos dizer que só estamos interessados no caso estático, para tanto eliminaremos qualquer derivada temporal em nossos Lagrangeanos. Assim, por exemplo, teremos que substituir o D'Alembertiano, $\square = \partial_{\mu}\partial^{\mu}$, pelo operador $-\nabla^2$.

Em segundo lugar, serão necessárias algumas escolhas particulares para os parâmetros presentes nos Lagrangeanos. Por exemplo, para o caso CPT-ímpar,

trabalharemos o caso especial: $v_\mu = 0$, $F \neq 0$, $\delta \neq 0$, $C^i = 0$ e $C^0 \neq 0$. Com esta escolha nosso Lagrangeano assume a forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{ímpar}} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu} \left[\frac{\nabla^4 - a\nabla^2 + b^2}{\nabla^4 - m_1\nabla^2 + m_2^2} \right] F^{\mu\nu} - \frac{C_0^2}{2}F_{i0} \left[\frac{\nabla^2 + m_2}{\nabla^4 - m_1\nabla^2 + m_2^2} \right] F^{i0} \\ & + \frac{Q}{2}F_{\mu\nu} \left[\frac{\nabla^2 - m_2}{\nabla^4 - m_1\nabla^2 + m_2^2} \right] \tilde{F}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Aqui, introduzimos o seguinte conjunto de parâmetros, por custões de conveniência:

$$\begin{aligned} a^2 = m_1 - (2P + C_0^2), & \quad m_1 = 8|F|^2 + 4\delta, \\ b^2 = m_2(m_2 - C_0^2), & \quad m_2 = 8|F|^2 + \frac{3}{2}\mu^2 + 2\delta, \\ P = \mu(2\text{Re}(F) + \frac{\mu}{2}) + i\tau(2\text{Im}(F) + i\frac{\tau}{2}), & \quad Q = 2i\text{Re}(F)\tau - 2\text{Im}(F)\mu. \end{aligned} \quad (5.8)$$

As dimensões de massa para estes parâmetros estão organizadas a continuação: $[a] = [b] = 1$ e $[m_1] = [m_2] = [P] = [Q] = 2$

De forma análoga, no caso CPT-par, demandaremos que a única componente não-nula do tensor $t_{\mu\nu}$ seja $t_{00} \neq 0$; esta escolha é motivada pelo fato de não se ter os momenta p^μ misturados na relação de dispersão. Logo o Lagrangeano se torna:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Par}} = & -\frac{1}{4}\gamma F_{\mu\nu} \frac{(\nabla^2 - M^2)}{(\nabla^2 - m^2)} F^{\mu\nu} + 16t_{00}F_{i0}F^{i0} - \frac{A_4}{A_2}t_{00}F_{i0} \frac{\nabla^2}{(\nabla^2 - m^2)} F^{i0} \\ & - \frac{A_5}{A_2}t_{00}F^{i0} \frac{\partial_i\partial_j}{(\nabla^2 - m^2)} F^{j0}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Novamente, introduzimos um conjunto de parâmetros que simplifica a notação:

$$\begin{aligned} \gamma = \frac{A_3A_2 - A_4t_\alpha^\alpha}{A_2}, & \quad A_2 = -C^{(1)}, \\ M^2 = \frac{A_3A_1}{A_3A_2 - A_4t_\alpha^\alpha}, & \quad A_3 = (1 + 16t_\alpha^\alpha), \\ m^2 = \frac{A_1}{A_2}, & \quad A_4 = 4\left(\frac{y}{4} - \frac{1}{8}\right), \\ A_1 = \frac{1}{16\Theta^2}, & \quad A_5 = \left(\frac{5y}{8} + \frac{13}{16}\right), \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde o analse dimensional mostra: $[A_2] = [A_3] = [A_4] = [A_5] = [\gamma] = 0$, $[m] = [M] = 1$ e $[A_1] = 2$.

Para se construir os correspondentes Hamiltonianos, calcularemos em primeiro lugar os momenta conjugados, Π^μ :

$$\Pi^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 A_\mu)}. \quad (5.11)$$

De acordo com a definição (5.11), encontramos que os momenta canônicos conjugados para cada caso são:

$$\Pi_{(\text{ímpar})}^0 = 0, \quad (5.12)$$

$$\Pi_{(\text{ímpar})}^i = - \left[\frac{\nabla^4 - \xi^2 \nabla^2 + \rho^2}{\nabla^4 - m_1 \nabla^2 + m_2^2} \right] F^{i0} - Q \left[\frac{\nabla^2 - m_2}{\nabla^4 - m_1 \nabla^2 + m_2^2} \right] B^i, \quad (5.13)$$

$$\Pi_{(\text{par})}^0 = 0, \quad (5.14)$$

$$\Pi_{(\text{par})}^i = \frac{(\alpha \nabla^2 - \beta)}{(\nabla^2 - m^2)} F^{i0} + \frac{2A_5}{A_2} t_{00} \frac{\partial^\mu \partial_j}{(\nabla^2 - m^2)} F^{j0}, \quad (5.15)$$

onde, na Eq.(5.15), definimos as variáveis $\alpha = \gamma - 32t_{00} + 2\frac{A_4}{A_2}$ e $\beta = \gamma M^2 - 32t_{00}m^2$. Similarmente na Eq. (5.13) definimos $\xi^2 = a^2 + C_0^2$ e $\rho^2 = b^2 - m_2 C_0^2$. Alem disso temos: $[\alpha] = 0$, $[\xi] = 1$ e $[\beta] = [\rho] = 2$.

Da Eq.(5.14) e Eq.(5.12), vemos que, para ambos os casos, o vínculo primário é o mesmo,o qual, segundo a abordagem de Dirac, é escrito como uma equação fraca $\Pi^0 \approx 0$.

Com as expressões para os Π^μ calculadas, mostra-se que os Hamiltonianos canônicos lêem-se:

$$\begin{aligned}
H_C^{\text{ímpar}} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{2}\Pi^i \left[\frac{\nabla^4 - m_1\nabla^2 + m_2^2}{\nabla^4 - \xi^2\nabla^2 + \rho^2} \right] \Pi_i + \frac{1}{4}\Pi_i \left[\frac{\nabla^2 - m_2^2}{\nabla^4 - \xi^2\nabla^2 + \rho^2} \right] B^i + \right. \\
\left. + \frac{Q}{2}\Pi_i \left[\frac{\nabla^2 - m_2^2}{\nabla^4 - m_1\nabla^2 + m_2^2} \right] B^i + \frac{1}{4}\Pi^i \left[\frac{\nabla^4 - m_1\nabla^2 + m_2^2}{\nabla^4 - \xi^2\nabla^2 + \rho^2} \right] \Pi_i + \right. \\
\left. + Q^2 B_i \Pi^i - A_0 \partial_i \Pi^i \right\}, \tag{5.16}
\end{aligned}$$

e ademais:

$$\begin{aligned}
H_C^{\text{par}} = \int d^3x \left\{ -A_0 \partial_i \Pi^i - \frac{1}{2}\Pi^i \frac{(\nabla^2 - m^2)}{(\alpha\nabla^2 - \beta)} \Pi_i + \frac{1}{4}F_{ij} \left(\frac{\nabla^2 - M^2}{\nabla^2 - m^2} \right) F^{ij} + \right. \\
\left. + \frac{1}{2}\partial^i \partial^k \Pi^k \frac{(\nabla^2 - m^2)}{(\nabla^2 + \Omega^2)^2 (\alpha\nabla^2 - \beta)} \partial_i \partial_j \Pi_j + \frac{A_5 t_{00}}{A_2} \times \left[\right. \\
\left. \left(\frac{(\nabla^2 - m^2)}{(\alpha\nabla^2 - \beta)} \Pi_i + \frac{(\nabla^2 - m^2)}{(\nabla^2 + \Omega^2) (\alpha\nabla^2 - \beta)} \partial_i \partial_k \Pi_k \right) \frac{\partial_i \partial_j}{(\nabla^2 - m^2)} \times \right. \\
\left. \left. \left(\frac{(\nabla^2 - m^2)}{(\alpha\nabla^2 - \beta)} \Pi^j + \frac{(\nabla^2 - m^2)}{(\nabla^2 + \Omega^2) (\alpha\nabla^2 - \beta)} \partial^j \partial^m \Pi^m \right) \right] \right\}, \tag{5.17}
\end{aligned}$$

onde $\frac{1}{\Omega^2} = 2\frac{A_2}{A_5}t_{00}\frac{1}{\alpha\nabla^2 - \beta}$.

O algoritmo de Dirac-Bergmann nos diz que, para encontrar os vínculos secundários, temos que impor a condição de consistência. Esta condição é simplesmente a validade, em cada instante de tempo, de nosso vínculo primário, $\Pi_0 \approx 0$. Utilizando a equação de movimento para uma variável dinâmica, $\dot{A} \approx \{A, H_C\}$, obtém-se o conhecido vínculo secundário, $\Gamma_1 = \partial_i \Pi^i \approx 0$. A conservação no tempo de Γ_1 não fornece nenhum novo vínculo, portanto o processo é retido neste passo. Podemos observar que, apesar de se ter Hamiltonianos diferentes, temos os mesmos vínculos que no caso tradicional; além disso, mostra-se facilmente que eles são de primeira classe.

Prosseguindo com o programa de Dirac para construir os Hamiltonianos responsáveis por gerar as translações no tempo como uma equação ordinária (ou seja no sentido forte), devemos somar aos nossos Hamiltonianos canônicos uma combinação linear dos vínculos, cujos coeficientes desempenham o papel de multiplicadores de Lagrange. Assim, o Hamiltoniano estendido escreve-se:

$$H = H_C + \int d^3x (c_0(x) \Pi_0(x) + c_1(x) \Gamma_1(x)),$$

onde $c_0(x)$ and $c_1(x)$ são funções arbitrárias do tempo e espaço.

Com um pouco de cuidado, pode-se ver que estes Hamiltonianos são passíveis de simplificação. Em [57], Dirac concluiu que as variáveis Π^0 e A_0 podem ser abandonadas por não possuírem significado físico. Para ver isto, lembremos que $\Pi^0 = 0$ para todo instante de tempo e a equação de movimento para A_0 , $\dot{A}_0(x) = \{A_0(x), H\} = c_0(x)$, nos diz que A_0 é uma quantidade cuja derivada temporal é uma função arbitrária. Logo, Π^0 pode ser abandonado e o termo no Hamiltoniano $A_0 \partial_i \Pi^i$ pode ser absorvido sem complicações, redefinindo a função $c^{(p,i)}(x)$ em (5.16) e (5.16). Após desta eliminação, os Hamiltonianos estendidos assumem as formas:

$$\begin{aligned} H_C^{\text{ímpar}} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{2} \Pi^i \left[\frac{\nabla^4 - m_1 \nabla^2 + m_2^2}{\nabla^4 - \xi^2 \nabla^2 + \rho^2} \right] \Pi_i + \frac{1}{4} \Pi_i \left[\frac{\nabla^2 - m_2^2}{\nabla^4 - \xi^2 \nabla^2 + \rho^2} \right] B^i + \right. \\ \left. + \frac{Q}{2} \Pi_i \left[\frac{\nabla^2 - m_2^2}{\nabla^4 - m_1 \nabla^2 + m_2^2} \right] B^i + \frac{1}{4} F_{ij} \left[\frac{\nabla^4 - a^2 \nabla^2 + b^2}{\nabla^4 - \xi^2 \nabla^2 + \rho^2} \right] F^{ij} + \right. \\ \left. + Q^2 B_i \Pi^i + c^{(i)}(x) \partial_i \Pi^i \right\} \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned}
H_C^{\text{par}} = \int d^3x \left\{ c^{(p)}(x) \partial_i \Pi^i - \frac{1}{2} \Pi^i \frac{(\nabla^2 - m^2)}{(\alpha \nabla^2 - \beta)} \Pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} \left(\frac{\nabla^2 - M^2}{\nabla^2 - m^2} \right) F^{ij} + \right. \\
\left. + \frac{1}{2} \partial^i \partial^k \Pi^k \frac{(\nabla^2 - m^2)}{(\nabla^2 + \Omega^2)^2 (\alpha \nabla^2 - \beta)} \partial_i \partial_j \Pi_j + \frac{A_5}{A_2} t_{00} \times \left[\right. \right. \\
\left. \left. \left(\frac{(\nabla^2 - m^2)}{(\alpha \nabla^2 - \beta)} \Pi_i + \frac{(\nabla^2 - m^2)}{(\nabla^2 + \Omega^2) (\alpha \nabla^2 - \beta)} \partial_i \partial_k \Pi_k \right) \frac{\partial_i \partial_j}{(\nabla^2 - m^2)} \times \right. \right. \\
\left. \left. \left(\frac{(\nabla^2 - m^2)}{(\alpha \nabla^2 - \beta)} \Pi^j + \frac{(\nabla^2 - m^2)}{(\nabla^2 + \Omega^2) (\alpha \nabla^2 - \beta)} \partial^j \partial^m \Pi^m \right) \right] \right\}, \quad (5.19)
\end{aligned}$$

onde $c^{(p,i)}(x) = c_1^{(p,i)}(x) - A_0(x)$.

Chamamos atenção para o fato de que a presença da função arbitrária $c(x)^{(p,i)}$ é indesejável, já que não temos um modo dar a esta significado em uma teoria quântica. Para evitar este problema, temos que impor uma vínculo de gauge *ad-hoc* de modo que todos os vínculos da teoria sejam de segunda classe. Adotando o enfoque da ref. [55], um vínculo particularmente conveniente é

$$\Gamma_2(x) \equiv \int_{C_{\zeta x}} dz^\nu A_\nu(z) \equiv \int_0^1 d\lambda x^i A_i(\lambda x) = 0, \quad (5.20)$$

Pode-se observar que, que sem perda de generalidade, podemos nos restringir ao caso de $\zeta^i = 0$. Desta forma podemos construir a matriz de vínculos, $M_{ab} = \{\Gamma_a, \Gamma_b\}$, que permitirá calcular os colchetes de Dirac para duas variáveis dinâmicas, A e B , segundo a definição:

$$\{A, B\}_{(D)} = \{A, B\} - \{A, \Gamma_a\} M^{ab} \{\Gamma_b, B\} \quad , \quad \text{onde } M^{ab} = M_{ab}^{-1}. \quad (5.21)$$

Em virtude de (5.21) pode-se mostrar que:

$$\{\Pi^i(x), \Pi^j(y)\}_{(D)} = 0, \quad (5.22)$$

$$\{A_i(x), A_j(y)\}_{(D)} = 0, \quad (5.23)$$

$$\{A_i(x), \Pi^j(y)\}_{(D)} = \delta_i^j \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) - \partial_i^x \int_0^1 d\lambda x^j \delta^{(3)}(\lambda \vec{x} - \vec{y}). \quad (5.24)$$

A transição para o cenário quântico é realizada pela substituição do colchete de Dirac pelas relações de comutação entre operadores, de acordo a regra: $\{A, B\}_{(D)} \rightarrow (-i/\hbar) [A, B]$.

Com ajuda da Eq.(5.24), podemos calcular os seguintes colchetes :

$$\{\Pi_k(\mathbf{x}), \Psi(\mathbf{y})\}_{(D)} = \frac{iq}{\hbar} \int_0^1 d\lambda y_k \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \lambda \mathbf{y}) \Psi(\mathbf{y}), \quad (5.25)$$

e

$$\{\Pi_k(\mathbf{x}), \bar{\Psi}(\mathbf{y})\}_{(D)} = -\frac{iq}{\hbar} \int_0^1 d\lambda y_k \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \lambda \mathbf{y}) \bar{\Psi}(\mathbf{y}), \quad (5.26)$$

que são importantes porque permitem conhecer a forma do estado $\Pi_i(x)|\Phi\rangle$:

$$\Pi_i(\mathbf{x})|\Phi\rangle = \bar{\Psi}(\mathbf{y})\Psi(\mathbf{y}')\Pi_i(\mathbf{x})|0\rangle + \left([\Pi_i(\mathbf{x}), \bar{\Psi}(\mathbf{y})] \Psi(\mathbf{y}') + \bar{\Psi}(\mathbf{y}) [\Pi_i(\mathbf{x}), \Psi(\mathbf{y}')] \right) |0\rangle. \quad (5.27)$$

Utilizando os comutadores das eqs. (5.25) e (5.26) mostra-se que

$$\Pi_i(x) |\bar{\Psi}(\mathbf{y}) \Psi(\mathbf{y}')\rangle = \bar{\Psi}(\mathbf{y}) \Psi(\mathbf{y}') \Pi_i(x) |0\rangle + q \int_{\mathbf{y}}^{\mathbf{y}'} dz_i \delta^{(3)}(\mathbf{z} - \mathbf{x}) |\Phi\rangle. \quad (5.28)$$

5.3 Energia de Interação

Agora que nos é claro como atua o operador de momento canônico no estado físico $|\Phi\rangle$, estamos preparados para determinar a energia de interação inter-partícula. Temos que assinalar que os férmions serão considerados como tendo massa infinita (caso estático), o que significa que não haverá campo magnético, que podemos eliminar dos Hamiltonianos. Também, nesta aproximação, podemos ignorar o campo ψ para efeitos de cálculos já que ele se desacopla [58]. Assim, levando em conta esta consideração o valor esperado do hamiltoniano no estado Φ reduz-se a:

$$\langle H \rangle_{\Phi}^{\text{ímpar}} = \langle \Phi | \int d^3x \left[\frac{1}{2} \Pi^i \left(\frac{\nabla^4 - m_1 \nabla^2 + m_2^2}{\nabla^4 - \xi^2 \nabla^2 + \rho^2} \right) \Pi_i \right] | \Phi \rangle. \quad (5.29)$$

$$\langle H \rangle_{\Phi}^{\text{par}} = \langle \Phi | \int d^3x \left[-\frac{1}{2} \Pi^i \frac{(\nabla^2 - m^2)}{(\alpha \nabla^2 - \beta)} \Pi_i \right] | \Phi \rangle. \quad (5.30)$$

Utilizando (5.28), encontramos que, para os dois casos, o valor esperado do Hamiltoniano apresenta a seguinte estrutura:

$$\langle H \rangle_{\Phi} = \langle H \rangle_0 + \langle H \rangle_{\Phi}^{(1)} + \langle H \rangle_{\Phi}^{(2)}, \quad (5.31)$$

com $\langle H \rangle_0 = \langle 0 | H | 0 \rangle$ sendo o valor esperado no vácuo, e $\langle H \rangle_{\Phi}^{(1)}$, $\langle H \rangle_{\Phi}^{(2)}$ as contribuições energéticas que interpretaremos como o potencial entre cargas opostas.

Em particular, para o caso CPT-ímpar temos que os termos $\langle H \rangle_{\Phi}^{\text{ímpar}(1)}$ e $\langle H \rangle_{\Phi}^{\text{ímpar}(2)}$ estão dadas pelas integrais:

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_{\Phi}^{\text{ímpar}(1)} = & -\frac{1}{4\sqrt{1-4\rho^2/\xi^4}} \left\{ \int d^3x \int_{\mathbf{y}}^{\mathbf{y}'} dz'_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}') \times \right. \\ & \left[(1 + \sqrt{1-4\rho^2/\xi^4}) \frac{\nabla^2}{\nabla^2 - M_1^2} - (1 - \sqrt{1-4\rho^2/\xi^4}) \frac{\nabla^2}{\nabla^2 - M_2^2} \right] \times \\ & \left. \int_{\mathbf{y}}^{\mathbf{y}'} dz^i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \right\}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_{\Phi}^{\text{ímpar}(2)} = & \frac{1}{2(M_1^2 - M_2^2)} \left\{ \int d^3x \int_{\mathbf{y}}^{\mathbf{y}'} dz'_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}') \times \right. \\ & \left[(m_1 M_1^2 - m_2) \frac{1}{\nabla^2 - M_1^2} - (m_2 - m_1 M_2^2) \frac{1}{\nabla^2 - M_2^2} \right] \times \\ & \left. \int_{\mathbf{y}}^{\mathbf{y}'} dz^i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \right\}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

de forma análoga, para o caso CPT-par chegamos a:

$$\langle H \rangle_{\Phi}^{\text{par}(1)} = -\frac{q^2}{2\alpha} \int d^3x \int_{\mathbf{y}}^{\mathbf{y}'} dz'_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}') \left(1 - \frac{\beta/\alpha}{\nabla^2} \right)_x^{-1} \int_{\mathbf{y}}^{\mathbf{y}'} dz^i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}), \quad (5.34)$$

$$\langle H \rangle_{\Phi}^{\text{par}(2)} = \frac{q^2 m^2}{2\alpha} \int d^3x \int_{\mathbf{y}}^{\mathbf{y}'} dz'_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}') \left(\frac{1}{\nabla^2 - \beta/\alpha} \right)_x \int_{\mathbf{y}}^{\mathbf{y}'} dz^i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}). \quad (5.35)$$

Percebe-se de forma imediata, a dependência na distância entre os campos estáticos externos para todas as integrais. Um guia de como devem ser calculadas as integrais mostradas acima encontra-se em [63], onde se calcula a seguinte integral:

$$\int_{\mathbf{y}}^{\mathbf{y}'} dz^i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = \frac{(y' - y)^i}{|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \times \sum_{k,l} Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi'). \quad (5.36)$$

Finalmente, após realizar estas integrações, pode-se mostrar que o potenciais entre duas partículas carregadas opostas, a uma distância $|\vec{y}' - \vec{y}|$, lêem-se:

$$V(\text{par}) = -\frac{q^2}{4\pi\alpha} \frac{e^{-\sqrt{\beta/\alpha} L}}{L} + \frac{q^2 m^2}{8\pi\alpha} \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{\beta/\alpha} \right) L, \quad (5.37)$$

$$V(\text{ímpar}) = -\frac{q^2}{4\pi\sqrt{1 - 4\rho^2/\xi^4}} \left\{ \frac{(1 + \sqrt{1 - 4\rho^2/\xi^4})e^{-M_1 L}}{2L} - \frac{(1 - \sqrt{1 - 4\rho^2/\xi^4})e^{-M_2 L}}{2L} \right\} + \frac{q^2}{8\pi\sqrt{\xi^4 - 4\rho^2}} \left\{ (m_1 M_1^2 - m_2^2) \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{M_1^2} \right) + (m_2 - m_1 M_2^2) \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{M_2^2} \right) \right\}. \quad (5.38)$$

Nas relações (5.37), (5.38) Λ é um *cutoff* ultravioleta e $|\mathbf{y} - \mathbf{y}'| \equiv L$. Devemos destacar que este *cutoff* surge quando manipulamos as integrais divergentes (no UV) (5.35) e (5.33). No presente nível de cálculos, devemos decidir acerca da escolha de um *cutoff* adequado. Por exemplo, no caso par, seguindo cadeia de definições para $A_1, A_2, A_3, A_4, \alpha, \beta$, and γ , fica claro que o único polo que corresponde a uma massa física é exatamente a massa do fotino, previamente dada na Eq. (4.46). Isto significa que o potencial derivado acima só tem sentido para distâncias acima do comprimento de onda do fotino, $\lambda_{\text{fotino}} \equiv m_{\text{fotino}}^{-1}$. Logo, nos é permitido de fazer a identificação $\Lambda^{(\text{par})} = m_{\text{photino}}$.

Com a escolha do *cutoff* realizada podemos concluir que, enquanto a interação estatica do par partícula-antipartícula se encontra dentro de um regime de distâncias $r > \lambda_{\text{photino}}$, a forma V , dada pela Eq. (5.37), é consistente e assume a forma seguinte:

$$V^{(par)} = -\frac{q^2}{4\pi\alpha} \frac{e^{-\sqrt{\beta/\alpha} L}}{L} + \frac{q^2 m^2}{8\pi\alpha} \ln \left(1 + \frac{m_{\text{photino}}^2}{\beta/\alpha} \right) L. \quad (5.39)$$

Um procedimento similar nos leva a propor um *cutoff* $\Lambda^{\text{ímpar}} = M_1$, logo o potencial no caso CPT-ímpar lê-se:

$$V^{(\text{ímpar})} = -\frac{q^2}{4\pi\sqrt{1-4\rho^2/\xi^4}} \left\{ \frac{(1 + \sqrt{1-4\rho^2/\xi^4})e^{-M_1 L}}{2L} - \frac{(1 - \sqrt{1-4\rho^2/\xi^4})e^{-M_2 L}}{2L} \right\} + \frac{q^2}{8\pi\sqrt{\xi^4 - 4\rho^2}} \left\{ (m_1 M_1^2 - m_2^2) \ln(2) + (m_2 - m_1 M_2^2) \ln \left(1 + \frac{M_1^2}{M_2^2} \right) \right\} L \quad (5.40)$$

Merece atenção a presença de uma tensão de corda finita (que é representada pela constante no potencial linear) nas Eq. (5.37) e (5.38). Aliás, é interessante notar que podemos falar sobre uma tensão de corda porque o quadro qualitativo usual do confinamento, em termos de um fluxo elétrico que serve de ligação aos quarks, se manifesta naturalmente no formalismo invariante de gauge usado neste capítulo [52, 59, 60, 61, 62, 63, 64].

Fechamos este capítulo com os resultados finais para potenciais estáticos partícula/anti-partícula obtidos a partir das ações fotônicas efetivas que incorporam os condensados fermiônicos que parametrizam simultaneamente a LSV e a quebra de SUSY.

Capítulo 6

Reflexões Conclusivas e Futuros Encaminhamentos

Ao longo desta Tese, exploramos as consequências de incorporar, de um modo particular, a Supersimetria no setor de gauge Abelian do SME. Esta inclusão, que em princípio poderia parecer fora dos padrões, tem-se mostrado necessária, uma vez que a origem da LSV reside em alguma teoria fundamental onde a SUSY é uma peça-chave; por exemplo, em um cenário de supercordas. Na literatura, diversos autores reconhecem esta necessidade, porém a forma de como realizar esta implementação move-se no âmbito do especulativo. Isto se deve principalmente ao fato de que ainda não conhecemos exatamente como a Supersimetria deve ser quebrada. Contrariamente aos programas de supersimetrização iniciais, onde se procurava manter a SUSY exata com o setor da LSV tratado como uma deformação na geometria do superespaço, o enfoque abordado nesta Tese tem a particularidade de propor um vínculo entre a quebra da SUSY e a violação da simetria de Lorentz. Esta dependência traz o que considero um dos aspectos mais interessantes do modelo: o surgimento de uma estrutura mais complexa para os campos de fundo.

Assim, a supersimetria mostra que é possível a quebra de Lorentz mesmo se os coeficientes clássicos do SME são zerados. Isto nos permite falar de um setor fermiônico da teoria responsável pela LSV, com a presença de campos fermiôni-

cos de natureza Grassmaniana que desempenham o papel de campos de fundo. Neste ambiente, deve-se mencionar que, quando a quebra da simetria de Lorentz é realizada e estes campos passam a ter um valor constante, os férmions supersimétricos de fundo se condensam em bilineares. Desta forma, a contribuição destes campos aos parâmetros da teoria e às grandezas físicas (como por exemplo as massas) é dado sempre através do fenômeno de condensação fermiônica. Contudo, esta qualidade apresenta algumas dificuldades de interpretação. Todos os condensados têm a propriedade, em virtude de sua origem Grassmaniana, de que as suas potências superiores a dois são nulas (lembramos que, por exemplo, $\Theta^3 = 0$). Fisicamente, um parâmetro como a massa não deveria ter natureza Grassmaniana. Poderíamos tentar reinterpretar este aspecto argumentando que, ao nível Lagrangeano, os campos fermiônicos de fundo são, na verdade, valores esperados no vácuo, perdendo assim a sua natureza anticomutante. Não obstante, a anticomutatividade, é essencial se os férmions de fundo são de natureza genuinamente supersimétricas. Este ponto abre uma questão que merece a nossa futura exploração. Encontramo-nos frente à questão de interpretar massas a partir de condensados fermiônicos e, de fato, a maneira mais imediata é se associar os condensados a valores esperados no vácuo de bilineares espinoriais anti-comutantes. A pergunta que resta a partir deste ponto-de-vista é buscar uma dinâmica fundamental que possa justificar a formação dos pares condensados no fundo supersimétrico.

Com relação aos potenciais estáticos, encontramos que estes possuem termos proporcionais à distância de separação entre partículas, manifestando um caráter confinante. O novo aspecto apresentado aqui é que os parâmetros envolvidos nos potenciais são ditados pela supersimetria.

Olhando para o futuro, ficam ainda várias questões pendentes. Mesmo com os cálculos das relações de dispersão para o caso CPT-ímpar e o caso CPT-par (realizado por um supermultiplete quirial somente), é necessário obter as expressões completas dos propagadores. A tarefa mencionada é relevante desde que devemos saber se as escolhas particulares (adotadas na simplificação dos modelos) são

compatíveis com as análises de estabilidade, causalidade e unitariedade. Isto nos coloca no problema de inverter totalmente os operadores bosônico e fermiônico, dados pelos elementos diagonais do operador de onda \mathcal{O} . Neste trabalho, tentou-se inverter o operador bosônico pelo método de operadores de spin, porém a presença do vetor constante C_{par}^μ (ou C_{impar}^μ) dificultou o procedimento. Uma alternativa longa é calcular o operador inverso pelo método de cofatores. Já no caso do operador fermiônico, teremos que inverter a matriz-4x4 mais geral que se pode escrever na representação das matrizes-gamma. Nesta Tese, calculou-se, pelo método de cofatores, um subconjunto destas matrizes considerando nulo o coeficiente proporcional às matrizes $\Sigma^{\mu\nu}$. Os autores da Ref.[65] estudaram atentamente o problema, sem esta restrição, com a pequena diferença de que a parametrização é realizada por 4 vetores quadridimensionais (que dão conta dos 16 coeficientes matriciais livres). Menos urgente é calcular o caso onde o supermultiplete vetorial é o responsável pela quebra de Lorentz; contudo este caso poderia resultar mais atraente se a análise dos propagadores for mais rica do que nossos casos prévios.

Dentro de nossa concepção de estabelecer a conexão entre a LSV e a SUSY com um fundo de genuínos parceiros bosônicos e fermiônicos, enfrentamos uma limitação bem severa. E cabe aqui esta auto-crítica: há uma grande arbitrariedade na escolha dos supermultipletos que podem acomodar o setor de fundo. Não temos ainda um modo sistemático de selecionar estes supercampos através de testes físicos que possam revelar pequenos desvios da simetria de Lorentz. Esta limitação de hoje é fonte de um estimulante objeto de pesquisa.

Finalmente, com a visão mais no horizonte, seria interessante começar a construir extensões supersimétricas para outros setores do SME, com uma ênfase mais ambiciosa na relação entre a SUSY (local, portanto, fala-se de uma supergravidade) e a violação de Lorentz em cenários com gravitação. Este novo cenário é um bom ponto-de-partida para novas investigações exploratórias.

Apêndice A

Elementos Básicos da SUSY-N=1

(Os Apêndices A e B utilizam as convenções das referências [66, 67])

O modelo mais elementar para campos supersimétricos é o modelo de Wess-Zumino sem interação e sem termo de massa. Este modelo é construído com um campo escalar complexo, ϕ , um espinor de Majorana, $\Psi = (\bar{\psi} \psi)^t$, e um campo auxiliar escalar complexo, F :

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* + \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu \psi - \frac{i}{2} \bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + |F|^2. \quad (\text{A.1})$$

A supersimetria é estabelecida por um conjunto de transformações que relacionam os campos bosônico e fermiônico de modo que a ação, $S = \int d^4x \mathcal{L}$, seja invariante:

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \sqrt{2}\xi\psi \\ \delta\psi &= i\sqrt{2}\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu\phi + \sqrt{2}\xi F \\ \delta F &= i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Estas transformações de SUSY exibem a propriedade de fechamento sob comutação, o que mostra uma estrutura de grupo subjacente.

$$[\delta_{(\text{susy-1})}, \delta_{(\text{susy-2})}]f = 2i(\xi_2\sigma^\mu\bar{\xi}_1 - \xi_1\sigma^\mu\bar{\xi}_2)\partial_\mu f, \quad (\text{A.3})$$

onde $f = (\phi, \psi, F)$.

Assim, duas transformações de supersimetria geram uma transformação de traslação. Este fato aponta que os geradores das traslações, P_μ , devem estar presente na álgebra da SUSY.

Para poder incorporar as transformações de SUSY dentro de uma álgebra, definiremos o geradores da supersimetria como:

$$\delta_{\text{susy}} = i\epsilon^A Q_A = i(\epsilon^\alpha Q_\alpha + \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}), \quad (\text{A.4})$$

onde ϵ e Q_α , a chamada carga quiral comportam-se como espinores de Majorana.

Calculando o comutador de duas transformações de SUSY:

$$\delta_1 = i(\xi_1 Q + \bar{\xi}_1 \bar{Q}) \quad e \quad \delta_2 = i(\xi_2 Q + \bar{\xi}_2 \bar{Q}), \quad (\text{A.5})$$

encontramos :

$$\begin{aligned} [\delta_1, \delta_2] = & -\xi_2^\beta \{Q_\alpha, Q_\beta\} \xi_1^\alpha - \xi_{2\dot{\beta}} \{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} \bar{\xi}_{1\dot{\alpha}} \\ & - \xi_2^\alpha \{\bar{Q}^{\dot{\beta}}, Q_\alpha\} \bar{\xi}_{1\dot{\alpha}} + \xi_1^\alpha \{Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} \bar{\xi}_{2\dot{\beta}}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

quando comparado com (A.3), leva às seguintes relações:

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} = 0, \\ \{\bar{Q}_{\dot{\beta}}, Q_\alpha\} &= 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu, \\ \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} &= 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Esta álgebra é completada como segue:

$$\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\lambda}] &= i(\eta_{\nu\rho}M_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\lambda}M_{\mu\rho}), \\
[P_\mu, M_{\rho\lambda}] &= i(\eta_{\mu\rho}P_\lambda - \eta_{\mu\lambda}P_\rho), \\
[P_\mu, P_\nu] &= 0, \\
\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 0 = \{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\}, \\
\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} &= 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}P_\mu, \\
\{Q^\alpha, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} &= 2(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\alpha}P_\mu, \\
[Q_\alpha, P_\mu] &= 0, \\
[M_{\mu\nu}, Q_\alpha] &= -i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta, \\
[M_{\mu\nu}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] &= -i(\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\beta}}.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Uma estrutura deste tipo é chamada de álgebra de Lie graduada, já que ela envolve comutadores e anti-comutadores.

Temos que mencionar aqui que esta não é a única generalização para a álgebra de Poincaré. Estas extensões acrescentam um novo índice, A , às cargas quirais, tal que $Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\beta} B} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}P_\mu\delta_B^A$, onde $A = 1, 2, \dots, N$. Para o nosso caso, estamos estudando a superálgebra quando $N=1$: a chamada Supersimetria Simples. $N \geq 2$ define as Supersimetrias Estendidas.

A.1 Formalismo em Supercampos $N=1$

Um elemento do super-espaço é denotado por $p^M = (x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$, M toma valores em $\{\mu, \alpha, \dot{\alpha}\}$; x^μ denota as coordenadas espaço-temporais e $\theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ denotam as coordenadas fermiônicas de natureza anti-comutante. Um elemento do grupo de translações finitas neste espaço pode ser definido como:

$$G(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{ip^M R_M}, \tag{A.9}$$

onde $R_M = (-P_\mu, Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\alpha}})$ representa um triplete de geradores. Então:

$$G(x, \theta, \bar{\theta}) = \exp(-ixP + \theta Q + \bar{\theta} \bar{Q}). \quad (\text{A.10})$$

O produto de dois elementos $G_1(x, \theta, \bar{\theta}) = e^B$ e $G_2(y, \xi, \bar{\xi}) = e^A$, naturalmente, é outro elemento do grupo de super-translações $G_3(x', \theta', \bar{\theta}')$. Utilizando a identidade Baker-Hausdorff-Campbell:

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots},$$

chega-se a:

$$\begin{aligned} G_2 \cdot G_1 &= G_3(x', \theta', \bar{\theta}') \\ &= \exp(-i[x^\mu + y^\mu - \theta\sigma\bar{\xi} + \xi\sigma\bar{\theta}]P_\mu + (\theta + \xi)Q + (\bar{\theta} + \bar{\xi})\bar{Q}). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

portanto, a translação induzida pela multiplicação de G_1 e G_2 é:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + y^\mu + i(\xi\sigma^\mu\bar{\theta}) - i(\theta\sigma^\mu\bar{\xi}) \\ \theta'^\alpha &= \theta^\alpha + \xi^\alpha \\ \bar{\theta}'_{\dot{\alpha}} &= \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Vamos, agora, introduzir o conceito do supercampo.

Um supercampo é uma função diferenciável definida no superespaço. Devido ao caráter Grassmaniano das coordenadas fermiônicas, uma expansão em potências de $\theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ tem um número finito de termos. Logo, a forma geral de um supercampo pode-se expressar como um polinômio finito em potências de θ e $\bar{\theta}$:

$$\begin{aligned} S(x, \theta, \bar{\theta}) &= \phi(x) + \theta^\alpha \psi_\alpha(x) + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \chi^{\dot{\alpha}}(x) + \theta^2 M(x) + \bar{\theta}^2 N(x) + \theta^2 \theta^\alpha \xi_\alpha(x) \\ &\quad + \theta^2 \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \lambda^{\dot{\alpha}}(x) + \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} A_\mu(x) + \theta^2 \bar{\theta}^2 F(x). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Os coeficientes desta expansão são chamados de campos componentes. Ao conjunto destes campos, denomina-se o supermultiplete. Então, para um supercampo geral, o supermultiplete, \mathbf{S} , é composto pelos campos :

$$\mathbf{S} = \{\psi_\alpha, \chi^{\dot{\alpha}}, \xi_\alpha, \lambda^{\dot{\alpha}}, \phi, M, N, F, A_\mu\}, \quad (\text{A.14})$$

onde temos 4 espinores de Majorana que correspondem a 16 graus de liberdade fermiônicos , 4 escalares complexos com 8 graus de liberdade bosônicos e 1 vector complexo com outros 8 graus de liberdade bosônicos. Assim, o número de graus de liberdade fermiônicos é igual ao número de graus de liberdade bosônicos e se tem uma realização linear da SUSY.

Para encontrar a representação em operadores diferenciais dos geradores da supersimetria, procedemos do mesmo modo que no caso do gerador P_μ . Lembrando, a representação diferencial de P_μ , pode-se obter da relação:

$$e^{-iy.P} \phi(x) e^{iy.P} = \phi(x + y). \quad (\text{A.15})$$

Assim, em analogia, podemos utilizar a seguinte expressão como ponto de partida :

$$e^{(-iyP+i\xi Q+i\bar{\xi}\bar{Q})} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) e^{(iyP-\xi Q-i\bar{\xi}\bar{Q})} = \Phi(x', \theta', \bar{\theta}'). \quad (\text{A.16})$$

Sem perda de generalidade, podemos fazer $x = 0$ e $y = 0$. Então,

$$\begin{aligned} (1 + i\xi Q + i\bar{\xi}\bar{Q}) \Phi (1 - i\xi Q - i\bar{\xi}\bar{Q}) &= \Phi(i\xi\sigma^\mu\bar{\theta} - i\theta\sigma^\mu\bar{\xi}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}) \\ \Phi + i[\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}, \Phi] &= i(\xi\sigma^\mu\bar{\theta} - \theta\sigma^\mu\bar{\xi})\partial_\mu\Phi + \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\Psi + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}}\Phi \\ \Phi + i[\xi Q, \Psi] + i[\bar{\xi}\bar{Q}, \Phi] &= \Psi + i(\xi\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu - i\xi^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha})\Phi \\ &\quad + i(-\theta\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu - i\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}})\Phi. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Aqui, usamos a seguintes convenções para as representações diferenciais das supercargas quirais:

$$[Q_\alpha, \Phi] = r(Q_\alpha)\Phi \quad e \quad [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \Phi] = r(\bar{Q}_{\dot{\alpha}})\Phi. \quad (\text{A.18})$$

Logo, a estrutura da representação diferencial para as cargas de supersimetria fica sendo:

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= -i\partial_\alpha + \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu, \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}} &= i\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} - \theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Além disto, a lei de transformação para um supercampo S é:

$$\delta_{\text{susy}}^{(\xi, \bar{\xi})} S(x, \theta, \bar{\theta}) = i(\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) S(x, \theta, \bar{\theta}). \quad (\text{A.20})$$

Já que a derivada nas coordenadas espaço-temporais, ∂_μ , não tem caráter anticomutativo o comutador $[\partial, \delta_{\text{susy}}]$ é nulo e, portanto, a derivada usual de um supercampo também é um supercampo. Este fato, porém, não é válido se consideramos as derivadas fermiônicas. Pode-se mostrar que os comutadores $[\partial_\alpha, \delta_{\text{susy}}]$ e $[\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}, \delta_{\text{susy}}]$ não são nulos; logo, as derivadas fermiônicas de um supercampo, $\partial_\alpha S$ e $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} S$, não são supercampos.

Para encontrar expressões que sejam covariantes, temos que mudar as derivadas ∂_α e $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}$ por derivadas covariantes, D_α , $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$, que verifiquem as regras de anticomutação $\{D_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\} = 0$ e $\{D_\alpha, Q^{\dot{\alpha}}\} = 0$.

As expressões para estas derivadas covariantes são dadas por :

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \partial_\alpha + i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu, \\ D^\alpha &= -\partial^\alpha - i\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu, \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}} \partial_\mu, \\ \bar{D}^{\dot{\alpha}} &= \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} + i(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} \theta_\beta \partial_\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

A importância das derivadas covariantes reflete-se no fato de que elas permitem estabelecer vínculos covariantes para reduzir o número de graus de liberdade de um supercampo geral. Este ponto será exposto em seguida.

A.2 Supercampos Quirais

Definimos um supercampo complexo quiral, Φ , pela condição

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi = 0, \quad (\text{A.22})$$

Este vínculo reduz os graus de liberdade do supercampo Φ , cuja expansão em campos componentes fica:

$$\begin{aligned}\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = & L(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu L(x) + (\theta)^2 F(x) + \\ & - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta)^2\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar{\theta} - \frac{1}{4}(\theta)^2(\bar{\theta})^2\Box L(x).\end{aligned}\quad (\text{A.23})$$

Similarmente, define-se o supercampo anti-quiral, $\bar{\Phi}$, por

$$D_\alpha\bar{\Phi} = 0, \quad (\text{A.24})$$

com:

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}) = & \bar{L}(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(x) - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\bar{L}(x) + (\bar{\theta})^2\bar{F}(x) + \\ & + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta})^2\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}(x) - \frac{1}{4}(\theta)^2(\bar{\theta})^2\Box\bar{L}(x).\end{aligned}\quad (\text{A.25})$$

Fisicamente, um supercampo quiral descreve um campo escalar complexo, L , um campo auxiliar F e um spinor de Weyl, de categoria-left.

Um cálculo rápido mostra que a variação de Φ por uma transformação de SUSY, $\delta\bar{\Phi} = i(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})\Phi$, reproduz as transformações de (A.2). Logo o modelo de Wess-Zumino pode ser reproduzido utilizando o supercampo quiral. Porém, devemos ter um mecanismo pelo qual as coordenadas Grassmanianas sejam saturadas. Isto é feito por meio da integração Grassmaniana.

A.3 Integração sobre as coordenadas de Grassmann

Para poder construir ações supersimétricas utilizando o formalismo de supercampos, é preciso definir uma regra de integração para as coordenadas Grassmanianas.

Para o caso de $D = 4$ definimos os diferenciais grassmanianos $d\theta_A, d\theta_B$ como aqueles que verificam:

$$\begin{aligned}
d\theta^2 &= -\frac{1}{4}d\theta^\alpha d\theta^\beta \epsilon_{\alpha\beta} \quad , \quad d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4}d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} d\bar{\theta}_{\dot{\beta}} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad , \quad d^4\theta = d^2\theta d^2\bar{\theta} \\
\{d\theta_A, d\theta_B\} &= \{d\theta_A, \theta^B\} = 0. \\
\int d^2\theta(\theta\theta) &= \int d^2\bar{\theta}(\bar{\theta}\bar{\theta}) = 1 \\
\int d^2\theta\theta^\alpha &= \int d^2\bar{\theta}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} = 0,
\end{aligned} \tag{A.26}$$

que motivam a as seguintes definiciones:

$$\delta\theta = \theta^2 \quad e \quad \delta\bar{\theta} = \bar{\theta}^2 \tag{A.27}$$

Assim, o cálculo da integral de um supercampo, Φ , é dado por

$$\int d^4\theta\Phi = \Phi|_{\theta^2\bar{\theta}^2}. \tag{A.28}$$

Portanto a integração grassmaniana projeta a componente de maior ordem nas potencias de θ .

Logo, a ação de Wess-Zumino (livre) em suprcampos é dada por:

$$S = \int d^4x d^4\theta \bar{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta})\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \tag{A.29}$$

A.4 Supercampos Vetoriais

Um supercampo vetorial é definido como aquele que verifica a condição de realidade:

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = V^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) \tag{A.30}$$

Na verdade, é um escalar de Lorentz, é real, mas é denominado vetorial por ser o supermultiplete mínimo a conter um 4-vetor entre a suas componentes. Com esta condição, podemos mostrar que a expansão em campos componentes é dada

por:

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = C(x) + \theta\xi + \bar{\theta}\bar{\xi} + \theta^2 M(x) + \bar{\theta}^2 M^*(x) + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu(x) + \theta^2\bar{\theta}^2[\bar{\Psi} + \frac{i}{2}\bar{\sigma}\partial_\mu\xi] + \bar{\theta}^2\theta[\Psi + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\xi}] + \theta^2\bar{\theta}^2[D(x) - \frac{1}{4}\square C(x)]. \quad (\text{A.31})$$

Este supercampo possui 8 graus de liberdade bosônicos e 8 fermiônicos. É possível reduzir este número introduzindo uma generalização da transformação de gauge.

A.4.1 Teoria de Gauge Abeliana Supersimétrica

Seja V um supercampo vetorial. Definimos a transformação de gauge supersimétrica por:

$$V' = V + \Phi + \bar{\Phi}, \quad (\text{A.32})$$

onde Φ é um supercampo quirral. A soma $\Phi + \bar{\Phi}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \Phi + \Phi^\dagger = & (\phi + \bar{\phi}) + \sqrt{2}\theta\psi + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi} + \theta^2 H + \bar{\theta}^2 H^* - 2\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu \text{Im}(\phi) \\ & + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}^2\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} - \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2\square \text{Re}(\phi) \end{aligned}$$

Logo, as variações das componentes do supercampo vetorial devido a uma transformação supersimétrica de gauge são:

$$\begin{aligned} \delta C(x) &= 2\text{Re}\phi(x), \\ \delta \chi(x) &= \sqrt{2}\psi(x), \\ \delta H(x) &= M, \\ \delta A_\mu(x) &= -2\partial_\mu \text{Im}\phi(x), \\ \delta \lambda(x) &= 0, \\ \delta D(x) &= 0. \end{aligned}$$

Aqui, podemos observar que os campos λ , D são invariantes de gauge e que a transformação do campo $A'_\mu(x) = A_\mu(x) - 2\partial_\mu \text{Im}\phi(x)$ corresponde à transformação Abeliana de gauge familiar. Este fato é o que motiva a nomenclatura

desta transformação para os supercampos vetoriais.

Se a transformação de gauge supersimétrica é uma simetria do modelo, então é possível, mediante uma escolha adequada do supercampo Φ , eliminar os campos C', χ', F' e uma componente do campo A'_μ do supercampo vetorial transformado, $V'(x, \theta, \bar{\theta})$. Esta escolha é conhecida como o calibre de Wess-Zumino e reduz o supercampo vetorial a:

$$V_{WZ}(x) = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + \theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}^2\theta\lambda(x) + \theta^2\bar{\theta}^2D(x). \quad (\text{A.33})$$

Este multiplete tem 3 graus de liberdade bosônicos no campo A_μ , 1 grau de liberdade bosônico no campo D e 4 graus de liberdade fermiônico no campo λ .

Para construir termos dinâmicos para o campo A_μ , definimos o supercampo intensidade de campo:

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}^2D_\alpha V \quad , \quad \bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}D^2\bar{D}_{\dot{\alpha}}V.$$

Desta definição, é fácil mostrar, em virtude de $D^3 = \bar{D}^3 = 0$, que os supercampos W_α e $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ são quiral e antiquiral respetivamente.

O supercampo intensidade de campo exhibe invariância perante uma transformação de gauge supersimétrica :

$$\begin{aligned} W'_\alpha &= W_\alpha - \frac{1}{4}\bar{D}^2D_\alpha(\Phi + \bar{\Phi}) = W_\alpha + \frac{1}{4}\bar{D}^{\dot{\beta}}\bar{D}_{\dot{\beta}}D_\alpha\Phi \\ &= W_\alpha + \frac{1}{4}\bar{D}^{\dot{\beta}}\{\bar{D}_{\dot{\beta}}, D_\alpha\}\Phi = W_\alpha + \frac{i}{2}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\bar{D}^{\dot{\beta}}\Phi = W_\alpha. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Em campos componentes , o supercampo intensidade de campo é dado por:

$$\begin{aligned} W_\alpha(x) &= \lambda_\alpha(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\lambda_\alpha(x) - \frac{1}{4}\bar{\theta}^2\theta^2\Box\lambda_\alpha(x) + \\ & 2\theta_\alpha D(x) - i\theta^2(\bar{\theta}\sigma^\mu)_\alpha\partial_\mu D(x) + (\sigma^{\mu\nu}\theta)_\alpha F_{\mu\nu}(x) \\ & - \frac{1}{2}\theta^2(\sigma^{\mu\nu}\sigma^\rho)_\alpha\partial_\rho F_{\mu\nu}(x) - i(\sigma^\mu\partial_\mu\lambda[x])_\alpha\theta^2. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Finalmente, a ação para uma teoria de gauge supersimétrica Abelianas assume a forma dada pela expressão:

$$S_{U(1)}^{(SUSY)} = \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \left\{ \frac{1}{4} W^\alpha W_\alpha \delta^2(\bar{\theta}) + \frac{1}{4} \bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}} \delta^2(\theta) \right\} \quad (\text{A.36})$$

$$= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{i}{2} \lambda \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda} + \frac{i}{2} \partial_\mu \lambda \sigma^\mu \bar{\lambda} + 2D^2 \right\}. \quad (\text{A.37})$$

O primeiro termo é a expressão familiar da ação para o campo A_μ , o segundo termo é uma contribuição exclusiva da supersimetria e introduz o campo fermiônico $\lambda(x)$, parceiro supersimétrico do fóton e que será chamado de “fotino” ou “gaugino”, no caso das teorias supersimétricas de Yang-Mills.

Apêndice B

Convenções e Relações Espinoriais

B.1 Espinores

B.1.1 Notação

Denotamos a componente de um spinor na representação $(\frac{1}{2}, 0)$ como ψ^α e um spinor na representação $(\frac{1}{2}, 0)^*$ como $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$.

$$(\psi_\alpha)^\dagger = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \quad (\psi^\alpha)^\dagger = \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \psi^\alpha &= \epsilon^{\alpha\beta} \psi_\beta & \psi_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta} \psi^\beta \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} &= \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\psi}_{\dot{\beta}} & \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} &= \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Métrica Espinorial

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon^{\alpha\beta} = (\epsilon_{\alpha\beta})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \epsilon^{\alpha\beta} &= -\epsilon^{\beta\alpha} \\ \bar{\epsilon} &= \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = (\bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} &= -\bar{\epsilon}^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

B.1.2 Convenções para a adição e conjugação Hermiteana de bispinores

Contração de índices

$$\begin{aligned}
\psi\xi &= \psi^\alpha\xi_\alpha = -\xi_\alpha\psi^\alpha = \xi^\alpha\psi_\alpha = \xi\psi, \\
\bar{\psi}\bar{\xi} &= \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\xi}\bar{\psi}, \\
\psi\sigma^\mu\bar{\xi} &= \psi_\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}, \\
\bar{\psi}(\bar{\sigma}^\mu)\xi &= \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\alpha\dot{\alpha}}\xi_\alpha.
\end{aligned}$$

Conjugação

$$\begin{aligned}
(\psi\xi)^\dagger &= \bar{\xi}\bar{\psi} = \bar{\psi}\bar{\xi}, \\
(\psi\sigma^\mu\bar{\xi})^\dagger &= \xi\sigma^\mu\bar{\psi} = -\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\xi, \\
(\psi\sigma^{\mu\nu}\xi)^\dagger &= \bar{\xi}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\psi}, \\
(\xi\sigma^{\mu\nu}\psi) &= -(\psi\sigma^{\mu\nu}\xi).
\end{aligned} \tag{B.4}$$

B.2 Relações úteis para os Espinores de 4-componentes

a) Relação I

Os espinores de Majorana anti-comutantes verificam as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
(\bar{\Phi}\Psi) &= (\bar{\Psi}\Phi), \\
(\bar{\Phi}\gamma_5\Psi) &= (\bar{\Psi}\gamma_5\Phi), \\
(\bar{\Phi}\gamma_\mu\Psi) &= -(\bar{\Psi}\gamma_\mu\Phi), \\
(\bar{\Phi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi) &= (\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Phi), \\
(\bar{\Phi}\Sigma^{\mu\nu}\Psi) &= -(\bar{\Psi}\Sigma^{\mu\nu}\Phi), \\
(\bar{\Phi}\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\Psi) &= -(\bar{\Psi}\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\Phi).
\end{aligned}$$

b) Relação II: Análise de Realidade

Reais

$$\begin{aligned}
 (\bar{Z}\Lambda)^\dagger &= \Lambda^\dagger \gamma^0 Z = \bar{\Lambda} Z = \bar{Z} \Lambda, \\
 (\bar{Z}\gamma^\mu \gamma_5 \Lambda)^\dagger &= \Lambda^\dagger \gamma_5 \gamma^\mu \dagger \gamma^0 Z = \Lambda^\dagger \gamma_5 \gamma^0 [\gamma^0 \gamma^\mu \dagger \gamma^0] Z = \bar{\Lambda} \gamma^\mu \gamma_5 Z = \bar{Z} \gamma^\mu \gamma_5 \Lambda, \\
 (\bar{Z}\Sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \Lambda)^\dagger &= \Lambda^\dagger \gamma_5 \Sigma^{\mu\nu} \dagger \gamma^0 Z = \Lambda^\dagger \gamma_5 \gamma^0 [\gamma^0 \Sigma^{\mu\nu} \dagger \gamma^0] Z = -\bar{\Lambda} \Sigma^{\mu\nu} \gamma_5 Z = \bar{Z} \Sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \Lambda.
 \end{aligned}$$

Imaginários Puros

$$\begin{aligned}
 (\bar{Z}\gamma_5 \Lambda)^\dagger &= \Lambda^\dagger \gamma_5 \gamma^0 Z = -\Lambda^\dagger \gamma^0 \gamma_5 Z = -\bar{\Lambda} \gamma_5 Z = -\bar{Z} \gamma_5 \Lambda, \\
 (\bar{Z}\gamma^\mu \Lambda)^\dagger &= \Lambda^\dagger \gamma^\mu \dagger \gamma^0 Z = \Lambda^\dagger \gamma^0 [\gamma^0 \gamma^\mu \dagger \gamma^0] Z = \bar{\Lambda} \gamma^\mu Z = -\bar{Z} \gamma^\mu \Lambda, \\
 (\bar{Z}\Sigma^{\mu\nu} \Lambda)^\dagger &= \Lambda^\dagger \Sigma^{\mu\nu} \dagger \gamma^0 Z = \Lambda^\dagger \gamma^0 [\gamma^0 \Sigma^{\mu\nu} \dagger \gamma^0] Z = \bar{\Lambda} \Sigma^{\mu\nu} Z = -\bar{Z} \Sigma^{\mu\nu} \Lambda.
 \end{aligned}$$

c) Relação III

As seguintes relações foram usadas para reescrever as ações expressas em campos componentes bi-espinoriaes em termos de espinores com 4 componentes.

Sendo w uma grandeza complexa , então:

$$\begin{aligned}
 w(\xi\chi) + h.c. &= \text{Re}(w)(\bar{Z}X) - i\text{Im}(w)(\bar{Z}\gamma_5 X), \\
 w(\bar{\xi}\bar{\chi}) + h.c. &= \text{Re}(w)(\bar{Z}X) + i\text{Im}(w)(\bar{Z}\gamma_5 X), \\
 w(\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\chi) + h.c. &= -\text{Re}(w)(\bar{Z}\gamma^\mu \gamma_5 X) + i\text{Im}(w)(\bar{Z}\gamma^\mu X), \\
 w(\xi\sigma^\mu\bar{\chi}) + h.c. &= \text{Re}(w)(\bar{Z}\gamma^\mu \gamma_5 X) + i\text{Im}(w)(\bar{Z}\gamma^\mu X), \\
 w(\xi\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\chi) + h.c. &= \text{Re}(w)\eta^{\mu\nu}(\bar{Z}X) - 2i\text{Re}(w)(\bar{Z}\Sigma^{\mu\nu} X) - 2\text{Im}(w)(\bar{Z}\Sigma^{\mu\nu} \gamma_5 X) \\
 &\quad - i\text{Im}(w)\eta^{\mu\nu}(\bar{Z}\gamma_5 X), \\
 w(\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\chi}) + h.c. &= \text{Re}(w)\eta^{\mu\nu}(\bar{Z}X) - 2i\text{Re}(w)(\bar{Z}\Sigma^{\mu\nu} X) + 2\text{Im}(w)(\bar{Z}\Sigma^{\mu\nu} \gamma_5 X) \\
 &\quad + i\text{Im}(w)\eta^{\mu\nu}(\bar{Z}\gamma_5 X).
 \end{aligned}$$

B.3 Álgebra das Matrizes de Dirac

a) Convenções

Vamos trabalhar utilizando as matrizes de Dirac na representação de Weyl:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu];$$

além disto, nossa convenção para a matriz- γ_5 será:

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!}\epsilon_{\kappa\alpha\beta\theta}\gamma^\kappa\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\theta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{0123} = 1. \quad (\text{B.5})$$

b) Produto de 2 matrizes gamma

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} - 2i\Sigma^{\mu\nu}. \quad (\text{B.6})$$

c) Produto de 3 matrizes gamma

A diferença do produto anterior, o produto de 3 matrizes gamma não é tão trivial e requer um pouco de atenção. Para começar vamos rever um pouco sobre a simetrização de índices em um tensor:

Seja as componentes de um tensor $T^{\mu_1\dots\mu_n}$, a antisimetrização sobre todos os índices é expressa como:

$$T^{[\mu_1\dots\mu_n]} = \frac{1}{n!}\delta_{\nu_1\dots\nu_n}^{\mu_1\dots\mu_n}T^{\nu_1\dots\nu_n}.$$

Agora, vamos proceder definindo o seguinte *tensor*, $\Gamma^{\mu\nu\rho} = 6\gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]}$; então:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu\nu\rho} &= 6\gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]} \\
&= \delta_{\alpha\beta\theta}^{\mu\nu\rho}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\theta \\
&= [-\epsilon^{\kappa\mu\nu\rho}\epsilon_{\kappa\alpha\beta\theta}]\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\theta = -\frac{6}{6}[\epsilon^{\kappa\mu\nu\rho}1_{4\times 4}\epsilon_{\kappa\alpha\beta\theta}]\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\theta \\
&= \frac{6}{4!}[-\epsilon^{\kappa\mu\nu\rho}\gamma_\kappa][\epsilon_{\kappa\alpha\beta\theta}\gamma^\kappa\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\theta] = [6i\epsilon^{\kappa\mu\nu\rho}\gamma_\kappa][\frac{i}{4!}\epsilon_{\kappa\alpha\beta\theta}\gamma^\kappa\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\theta] \\
&= 6i\epsilon^{\kappa\mu\nu\rho}\gamma_\kappa\gamma_5.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu\nu\rho} &= \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho + \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu - \\
&\quad \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho - \gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu \\
&\quad \text{(usando a álgebra de Clifford)} \\
&= 2\eta^{\mu\nu}\gamma^\rho + 2\eta^{\rho\nu}\gamma^\mu + 2\eta^{\mu\rho}\gamma^\mu - 2\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho - 2\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu - 2\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu \\
&= 2\eta^{\mu\nu}\gamma^\rho + 2\eta^{\rho\nu}\gamma^\mu + 2\eta^{\mu\rho}\gamma^\mu - 4\eta^{\mu\nu}\gamma^\rho + 4\eta^{\nu\rho}\gamma^\mu - 4\eta^{\mu\nu}\gamma^\rho + 4\eta^{\mu\rho}\gamma^\nu \\
&\quad - 6\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu \\
6i\epsilon^{\kappa\alpha\mu\nu}\gamma_\kappa\gamma_5 &= 6\eta^{\mu\nu}\gamma^\alpha + 6\eta^{\nu\alpha}\gamma^\mu - 6\eta^{\mu\alpha}\gamma^\mu - 6\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu,
\end{aligned}$$

portanto:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho = \eta^{\mu\nu}\gamma^\rho + \eta^{\nu\rho}\gamma^\mu - \eta^{\mu\rho}\gamma^\nu - i\epsilon^{\mu\nu\rho\kappa}\gamma_\kappa\gamma_5. \quad (\text{B.7})$$

Com este resultado, podemos inicialmente derivar uma identidade importante.

Assim, vamos construir o seguinte produto:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu &= \frac{1}{4}[\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho]\gamma_\rho \\
&\quad \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu + \frac{1}{4}(-i\epsilon^{\mu\nu\rho\kappa}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_\kappa\gamma_5)\gamma_\rho \\
\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu &= \frac{i}{2}\delta_{\alpha\beta}^{\kappa\rho}\gamma_\kappa\gamma_\rho\gamma_5 = \frac{i}{2}[\gamma_\kappa, \gamma_\rho]\gamma_5,
\end{aligned}$$

que com um pouco de manipulação nos leva finalmente a:

$$\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5 = -\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}. \quad (\text{B.8})$$

Com o produto de 3 matrizes conhecido, também podemos derivar outras identidades que apareceram frequentemente:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu\Sigma^{\alpha\beta} &= \frac{i}{2}(\eta^{\mu\alpha}\gamma^\beta - \eta^{\mu\beta}\gamma^\alpha - i\epsilon^{\mu\alpha\beta\nu}\gamma_\nu\gamma_5), \\ \Sigma^{\alpha\beta}\gamma^\mu &= \frac{i}{2}(\eta^{\mu\beta}\gamma^\alpha - \eta^{\alpha\mu}\gamma^\beta - i\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\gamma_\nu\gamma_5). \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

d) Produto de 4 matrizes gamma

$$\begin{aligned} \gamma^\mu\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta &= \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta} + \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_5 + \\ &2i\eta^{\nu\alpha}\Sigma^{\beta\mu} + 2i\eta^{\alpha\beta}\Sigma^{\nu\mu} + 2i\eta^{\nu\beta}\Sigma^{\mu\alpha} + \\ &2i\eta^{\mu\nu}\Sigma^{\beta\alpha} + 2i\eta^{\beta\mu}\Sigma^{\alpha\nu} + 2i\eta^{\alpha\nu}\Sigma^{\nu\beta}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Contudo, é mais interessante o produto de duas matrizes Σ :

$$\begin{aligned} \Sigma^{\mu\nu}\Sigma^{\alpha\beta} &= \frac{1}{4}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta} + i\epsilon^{\nu\alpha\beta\mu}\gamma_5) + \\ &\frac{i}{2}(\eta^{\nu\alpha}\Sigma^{\mu\beta} - \eta^{\nu\beta}\Sigma^{\mu\alpha} - \eta^{\mu\beta}\Sigma^{\alpha\nu} - \eta^{\mu\alpha}\Sigma^{\nu\beta}). \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Para o cálculo de ambos resultados foi utilizada a identidade (B.8).

e) Identidade que envolve o produto de 5 matrizes

Nosso propósito agora é procurar uma expressão para a produto $\Sigma^{\mu\nu}\gamma^\theta\Sigma^{\alpha\beta}$, que, como se pode ver, no fundo envolve o produto de 5 matrizes gamma. Este produto tem a particularidade de que se é realizado fazendo produtos sucessivos

seguindo um ordem (que pode ser direita o esquerda) temos resultados diferentes em aparência. Vamos ver isso com mais detalhe.

Em primiro lugar, se o cálculo é feito realizando o produto de matrizes pela direita o resultado obtido é:

$$\begin{aligned}\Sigma^{\mu\nu}\gamma^\theta\Sigma^{\alpha\beta}_{\text{direita}} &= \frac{1}{4}(\eta^{\theta\nu}\eta^{\beta\mu} - \eta^{\theta\mu}\eta^{\beta\nu})\gamma^\alpha + \frac{1}{4}(\eta^{\theta\mu}\eta^{\alpha\nu} - \eta^{\theta\nu}\eta^{\alpha\mu})\gamma^\beta + \\ &\frac{1}{4}(\eta^{\alpha\mu}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha})\gamma^\theta + \frac{1}{4}(\eta^{\alpha\nu}\eta^{\beta\theta} - \eta^{\nu\beta}\eta^{\theta\alpha})\gamma^\mu + \\ &\frac{1}{4}(\eta^{\theta\alpha}\eta^{\mu\beta} - \eta^{\theta\beta}\eta^{\alpha\mu})\gamma^\nu \\ &\frac{i}{4}\epsilon^{\beta\mu\nu\rho}\gamma_\rho\gamma_5\eta^{\theta\alpha} - \frac{i}{4}\epsilon^{\alpha\mu\nu\rho}\gamma_\rho\gamma_5\eta^{\theta\beta} + \\ &\frac{i}{4}\epsilon^{\theta\alpha\beta\nu}\gamma^\mu\gamma_5 - \frac{i}{4}\epsilon^{\theta\alpha\beta\mu}\gamma^\nu\gamma_5.\end{aligned}$$

Por outro lado, se a multiplicação e feita pela esquerda, temos :

$$\begin{aligned}\Sigma^{\mu\nu}\gamma^\theta\Sigma^{\alpha\beta}_{\text{esquerda}} &= \frac{1}{4}(\eta^{\theta\nu}\eta^{\beta\mu} - \eta^{\theta\mu}\eta^{\beta\nu})\gamma^\alpha + \frac{1}{4}(\eta^{\theta\mu}\eta^{\alpha\nu} - \eta^{\theta\nu}\eta^{\alpha\mu})\gamma^\beta + \\ &\frac{1}{4}(\eta^{\alpha\mu}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha})\gamma^\theta + \frac{1}{4}(\eta^{\alpha\nu}\eta^{\beta\theta} - \eta^{\nu\beta}\eta^{\theta\alpha})\gamma^\mu + \\ &\frac{1}{4}(\eta^{\theta\alpha}\eta^{\mu\beta} - \eta^{\theta\beta}\eta^{\alpha\mu})\gamma^\nu \\ &\frac{i}{4}\epsilon^{\mu\alpha\beta\rho}\gamma_\rho\gamma_5\eta^{\theta\nu} - \frac{i}{4}\epsilon^{\nu\alpha\beta\rho}\gamma_\rho\gamma_5\eta^{\theta\mu} + \\ &\frac{i}{4}\epsilon^{\theta\mu\nu\alpha}\gamma^\beta\gamma_5 - \frac{i}{4}\epsilon^{\theta\mu\nu\beta}\gamma^\alpha\gamma_5.\end{aligned}$$

Isto nos faz sugerir a seguinte identidade para garantir a consistência do produto de matrizes

Identidade: $A = B$,

onde:

$$A = \frac{i}{4} \left(\epsilon^{\beta\mu\nu\rho}\gamma_\rho\gamma_5\eta^{\theta\alpha} - \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho}\gamma_\rho\gamma_5\eta^{\theta\beta} + \epsilon^{\theta\alpha\beta\nu}\gamma^\mu\gamma_5 - \epsilon^{\theta\alpha\beta\mu}\gamma^\nu\gamma_5 \right)$$

$$B = \frac{i}{4} \left(\epsilon^{\mu\alpha\beta\rho} \gamma_\rho \gamma_5 \eta^{\theta\nu} - \epsilon^{\nu\alpha\beta\rho} \gamma_\rho \gamma_5 \eta^{\theta\mu} + \epsilon^{\theta\mu\nu\alpha} \gamma^\beta \gamma_5 - \epsilon^{\theta\mu\nu\beta} \gamma^\alpha \gamma_5 \right).$$

Porém, nenhuma das duas expressões anteriores é conveniente para ser utilizada em nossos cálculos, já que bilineares formados por qualquer um delas não tem realidade definida (Isto é possuem uma parte real e imaginaria). Porém, isto é facilmente solucionado ao fazer uso da seguinte expressão para nosso produto:

$$\begin{aligned} \Sigma^{\mu\nu} \gamma^\theta \Sigma^{\alpha\beta} = & \frac{1}{4} (\eta^{\theta\nu} \eta^{\beta\mu} - \eta^{\theta\mu} \eta^{\beta\nu}) \gamma^\alpha + \frac{1}{4} (\eta^{\theta\mu} \eta^{\alpha\nu} - \eta^{\theta\nu} \eta^{\alpha\mu}) \gamma^\beta + \\ & \frac{1}{4} (\eta^{\alpha\mu} \eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha}) \gamma^\theta + \frac{1}{4} (\eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\theta} - \eta^{\nu\beta} \eta^{\theta\alpha}) \gamma^\mu + \\ & \frac{1}{4} (\eta^{\theta\alpha} \eta^{\mu\beta} - \eta^{\theta\beta} \eta^{\alpha\mu}) \gamma^\nu \\ & \frac{i}{8} \left(\epsilon^{\beta\mu\nu\rho} \gamma_\rho \gamma_5 \eta^{\theta\alpha} - \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} \gamma_\rho \gamma_5 \eta^{\theta\beta} + \epsilon^{\theta\alpha\beta\nu} \gamma^\mu \gamma_5 - \epsilon^{\theta\alpha\beta\mu} \gamma^\nu \gamma_5 \right) \\ & \frac{i}{8} \left(\epsilon^{\mu\alpha\beta\rho} \gamma_\rho \gamma_5 \eta^{\theta\nu} - \epsilon^{\nu\alpha\beta\rho} \gamma_\rho \gamma_5 \eta^{\theta\mu} + \epsilon^{\theta\mu\nu\alpha} \gamma^\beta \gamma_5 - \epsilon^{\theta\mu\nu\beta} \gamma^\alpha \gamma_5 \right). \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

f) Identidade que envolve o produto de 6 matrices Gamma

$$\begin{aligned} \Sigma^{\rho\lambda} \Sigma^{\mu\nu} \Sigma^{\alpha\beta} = & \frac{i}{16} (\eta^{\nu\alpha} \eta^{\rho\mu} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\rho\nu}) \eta^{\lambda\beta} + \frac{i}{16} (\eta^{\nu\beta} \eta^{\rho\alpha} - \eta^{\nu\alpha} \eta^{\rho\beta}) \eta^{\lambda\mu} + \\ & \frac{i}{16} (\eta^{\mu\beta} \eta^{\rho\nu} - \eta^{\nu\beta} \eta^{\rho\mu}) \eta^{\lambda\alpha} + \frac{i}{16} (\eta^{\mu\alpha} \eta^{\rho\beta} - \eta^{\mu\beta} \eta^{\rho\alpha}) \eta^{\lambda\nu} + \\ & \frac{1}{16} \eta^{\nu\beta} \epsilon^{\lambda\mu\alpha\rho} \gamma_5 - \frac{1}{16} \eta^{\nu\alpha} \epsilon^{\lambda\mu\beta\rho} \gamma_5 \\ & \frac{1}{16} \eta^{\mu\beta} \epsilon^{\lambda\alpha\nu\rho} \gamma_5 + \frac{1}{16} \eta^{\mu\alpha} \epsilon^{\lambda\nu\beta\rho} \gamma_5 \\ & \frac{1}{16} (\eta^{\mu\alpha} \eta^{\lambda\nu} - \eta^{\nu\alpha} \eta^{\lambda\mu}) \Sigma^{\rho\beta} + \frac{1}{16} (\eta^{\nu\alpha} \eta^{\lambda\beta} - \eta^{\nu\beta} \eta^{\lambda\alpha}) \Sigma^{\rho\mu} + \\ & \frac{1}{16} (\eta^{\nu\alpha} \eta^{\rho\beta} - \eta^{\nu\beta} \eta^{\rho\alpha}) \Sigma^{\mu\lambda} + \frac{1}{16} (\eta^{\nu\alpha} \eta^{\rho\mu} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\rho\nu}) \Sigma^{\lambda\beta} + \\ & \frac{1}{16} (\eta^{\nu\beta} \eta^{\lambda\mu} - \eta^{\mu\beta} \eta^{\lambda\nu}) \Sigma^{\rho\alpha} + \frac{1}{16} (\eta^{\mu\beta} \eta^{\rho\nu} - \eta^{\nu\beta} \eta^{\rho\mu}) \Sigma^{\lambda\alpha} + \\ & \frac{1}{16} (\eta^{\mu\beta} \eta^{\lambda\alpha} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\lambda\beta}) \Sigma^{\rho\nu} + \frac{1}{16} (\eta^{\mu\beta} \eta^{\rho\alpha} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\rho\beta}) \Sigma^{\nu\lambda} + \\ & \frac{1}{4} (\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha}) \Sigma^{\rho\lambda} + \frac{i}{4} \epsilon^{\nu\alpha\beta\mu} \gamma_5 \Sigma^{\rho\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

4. Rearrangimentos de Fierz

O conjunto de 16 matrizes:

$$\Gamma^A = \{1, \gamma^\mu, \Sigma^{\mu\nu}, \gamma_5, i\gamma^\mu\gamma_5\}, \quad (\text{B.14})$$

forma uma base para as matrizes- 4×4 . Qualquer matriz pode ser expressa como uma combinação linear das matrizes Γ^A :

$$M = \sum c_A \Gamma^A. \quad (\text{B.15})$$

Para encontrar os coeficientes c_A , basta multiplicar a última expressão por Γ_B , onde o índice embaixo denota a inversa das matrizes Γ :

$$\Gamma_A = \{1, \gamma_\mu, \Sigma_{\mu\nu}, \gamma_5, i\gamma_\mu\gamma_5\}. \quad (\text{B.16})$$

$$\Gamma_A = (\Gamma^A)^{-1}. \quad (\text{B.17})$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} M\Gamma_B &= \sum c_A \Gamma^A \Gamma_B \\ \text{tr}(M\Gamma_B) &= \text{tr}\left(\sum c_A \Gamma^A \Gamma_B\right) \\ \text{tr}(M\Gamma_B) &= \sum c_A \text{tr}(\delta_B^A 1) \quad \text{então} \\ c_A &= \frac{1}{4} \text{tr}(M\Gamma_A). \end{aligned}$$

Com isto, a matriz M pode ser escrita como:

$$M = \frac{1}{4} \text{tr}(M\Gamma_A) \Gamma^A. \quad (\text{B.18})$$

Por exemplo, seja $M_{\alpha\beta} = \Psi_\alpha \bar{\Psi}_\beta$

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha \bar{\Psi}_\beta &= \frac{1}{4} \Psi_\gamma \bar{\Psi}_\delta (\Gamma_A)_{\delta\gamma} (\Gamma^A)_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4} \bar{\Psi}_\delta (\Gamma_A)_{\delta\gamma} \Psi_\gamma (\Gamma^A)_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{4} (\bar{\Psi} \Gamma_A \Psi) \Gamma^A_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

portanto:

$$\Psi \bar{\Psi} = -\frac{1}{4} (\bar{\Psi} \Gamma_A \Psi) \Gamma^A. \quad (\text{B.19})$$

Este resultado é importante, já que aparecerá muita vezes no momento que eliminamos os campos auxiliares de nossas super-ações. Assim, se Ψ é um espinor de Majorana representando o campo de fundo fermiônico (Ψ ou Z no capítulo 4), pelas propriedades acima temos:

$$\Psi\bar{\Psi} = -\frac{1}{4}\Theta 1_{4\times 4} - \frac{1}{4}\tau\gamma_5 + \frac{1}{4}C_\mu\gamma^\mu\gamma_5. \quad (\text{B.20})$$

Também, podemos trabalhar a expressão

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi}M\chi)(\bar{\Theta}N\xi) &= \bar{\Psi}_\alpha M_{\alpha\beta}\chi_\beta \bar{\Theta}_\gamma N_{\gamma\delta}\xi_\delta = (\bar{\Psi}_\alpha\xi_\delta) M_{\alpha\beta}\chi_\beta \bar{\Theta}_\gamma N_{\gamma\delta} \\ &= \frac{1}{4} \left[\bar{\Psi}_\kappa\xi_\lambda(\Gamma_A)_{\lambda\kappa} \right] \Gamma_{\delta\alpha}^A M_{\alpha\beta}\chi_\beta \bar{\Theta}_\gamma N_{\gamma\delta} \\ &= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}_\kappa(\Gamma_A)_{\lambda\kappa}\xi_\lambda)(-\bar{\Theta}_\gamma N_{\gamma\delta}\Gamma_{\delta\alpha}^A M_{\alpha\beta}\chi_\beta). \end{aligned}$$

Com esta última manipulação, estamos prontos para deduzir as relações de ortogonalidade para os condensados fermiônicos :

$$(\bar{\Psi}M\chi)(\bar{\Theta}N\xi) = -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Gamma_A\xi)(\bar{\Theta}N\Gamma^A M\chi). \quad (\text{B.21})$$

Para $\Psi = \chi = \Theta = \xi$ e $M = N = 1$, temos

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\Psi) &= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Gamma_A\Psi)(\bar{\Psi}\Gamma^A\Psi) \\ (\bar{\Psi}\Psi)^2 &= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Psi)^2 - \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^2 + \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi) \\ 5(\bar{\Psi}\Psi)^2 &= -(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^2 + (\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Da mesma forma, se agora $\Psi = \chi = \Theta = \xi$ e $M = N = \gamma_5$, temos

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi) &= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Gamma_A\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\Gamma^A\gamma_5\Psi) \\ (\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^2 &= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Psi)^2 - \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^2 + \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu\gamma_5\Psi) \\ 5(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^2 &= -(\bar{\Psi}\Psi)^2 - (\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)^2 (**). \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Somando as duas últimas relações encontramos :

$$(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^2 = -(\bar{\Psi}\Psi)^2$$

Levando $(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^2 = -(\bar{\Psi}\Psi)^2$ na expressão (*) ou (**), chegamos ao resultado importante:

$$\boxed{(\bar{\Psi}\Psi)^2 = -(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^2 = \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)^2}. \quad (\text{B.24})$$

Vamos derivar, agora, as relações de ortogonalidade entre os condensados fermiônicos de Majorana.

1^{era} relação

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi) &= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Gamma_A\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\Gamma_A\Psi) \\ &= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi) - \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_5\Psi) \\ &\quad + \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu\gamma_5\Psi) \\ &= -\frac{1}{2}(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi) \quad \text{então} \\ &(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

2^{da} relação

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi) &= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Gamma_A\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Gamma_A\Psi) \\ &= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi) - \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\gamma_5\Psi) \\ &\quad + \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_\nu\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\gamma^\nu\gamma_5\Psi) \\ &= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi) - \frac{1}{4}\eta_\mu^\nu(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\nu\gamma_5\Psi) \\ &= -\frac{1}{2}(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi) \quad \text{então} \\ &\boxed{(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi) = 0}. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

3^{da} relação

$$\begin{aligned}
(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi) &= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Gamma_A\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Gamma_A\gamma_5\Psi) \\
&= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\gamma_5\Psi) - \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\gamma_5\gamma_5\Psi) \\
&\quad + \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_\nu\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\gamma^\nu\gamma_5\gamma_5\Psi) \\
&= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi) - \frac{1}{4}\eta_\mu^\nu(\bar{\Psi}\gamma_\nu\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi) \\
&= -\frac{1}{2}(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi) \text{ então} \\
(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi) &= 0. \tag{B.27}
\end{aligned}$$

Além disto,

$$\begin{aligned}
(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\nu\gamma_5\Psi) &= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Gamma_A\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Gamma_A\gamma_\nu\gamma_5\Psi) \\
&= \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\Psi) - \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5\Psi) \\
&\quad - \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_\lambda\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma_\nu\gamma_5\Psi) \\
&= \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}(\bar{\Psi}\Psi)^2 - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^2 \\
&\quad - \frac{1}{4}\left[\eta_\nu^\lambda(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi) + \eta_\mu^\lambda(\bar{\Psi}\gamma_\nu\gamma_5\Psi) - \eta_{\mu\nu}(\bar{\Psi}\gamma^\lambda\gamma_5\Psi)\right] \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\bar{\Psi}\Psi)^2 - \frac{1}{2}(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\nu\gamma_5\Psi) + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)^2 \\
C_\mu C_\nu &= (\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\nu\gamma_5\Psi) = \eta^{\mu\nu}(\bar{\Psi}\Psi)^2 = \eta^{\mu\nu}\Theta^2 \tag{B.28}
\end{aligned}$$

Observação Prática:

Com o conjunto das 16 matrizes (B.14) e as identidades de traço, é possível esboçar um método recursivo para calcular o produto de um número arbitrário

de matrizes gamma. Seja M dada por:

$$\begin{aligned}
M &= \gamma^{\nu_1} \times \dots \times \gamma^{\nu_n} \\
&\text{que sabemos pode-se escrever como:} \\
&= \Sigma c_A \Gamma^A,
\end{aligned} \tag{B.29}$$

onde os coeficientes são dados por $c_A = \frac{1}{4} \text{tr}(\gamma^{\nu_1} \times \dots \times \gamma^{\nu_n} \Gamma_A)$.
Sabe-se que para, n par, temos:

$$\text{tr}(\gamma^{\nu_1} \times \dots \times \gamma^{\nu_n}) = (-1)^k \eta^{\nu_1 \nu_k} \sum_{k=2}^n \text{tr}(\gamma^{\nu_2} \times \dots \times \gamma^{\nu_{k-1}} \gamma^{\nu_{k+1}} \dots \times \gamma^{\nu_n}), \tag{B.30}$$

e é nulo se n é ímpar.

Portanto, se M é o produto de un número par de matrizes gamma, temos

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1}{4} \text{tr}(\gamma^{\nu_1} \times \dots \times \gamma^{\nu_n}) 1_{4 \times 4} + \frac{1}{4} \text{tr}(\gamma^{\nu_1} \times \dots \times \gamma^{\nu_n} \gamma_5) \gamma_5 + \\
&\frac{1}{4} \text{tr}(\gamma^{\nu_1} \times \dots \times \gamma^{\nu_n} \Sigma_{\mu\nu}) \Sigma^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{B.31}$$

Contrariamente, se M é dado pelo produto de un numero ímpar de matrizes gamma:

$$M = \frac{1}{4} \text{tr}(\gamma^{\nu_1} \times \dots \times \gamma^{\nu_n} \gamma_\mu) \gamma^\mu - \frac{1}{4} \text{tr}(\gamma^{\nu_1} \times \dots \times \gamma^{\nu_n} \gamma_\mu \gamma_5) \gamma^\mu \gamma_5 \tag{B.32}$$

4. Modo útil de inversão no espaço espinorial

Seja uma matriz dada por :

$$M = a 1_{4 \times 4} + b \gamma_5 + v_\mu \gamma^\mu + w_\mu \gamma^\mu \gamma_5. \tag{B.33}$$

Então, a matriz inversa é:

$$M^{-1} = A 1_{4 \times 4} + B \gamma_5 + R_\mu \gamma^\mu + S_\mu \gamma^\mu \gamma_5 + l_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu}, \tag{B.34}$$

onde:

$$\begin{aligned}
A &= a(a^2 - b^2 - v^2 + w^2)/\Delta, \\
B &= -b(a^2 - b^2 - v^2 + w^2)/\Delta, \\
R_\mu &= \{[v^2 + w^2 - (a^2 - b^2)]v_\mu - 2(w, v)w_\mu\}/\Delta, \\
S_\mu &= \{2(v, w)v_\mu - [v^2 + w^2 + (a^2 - b^2)]w_\mu\}/\Delta, \\
l_{\mu\nu} &= \{4ibv_\mu w_\nu - 2av_\alpha w_\beta \epsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\}/\Delta, \\
\Delta &= (a^2 - b^2 - v^2 + w^2 - 2(v, w))(a^2 - b^2 - v^2 + w^2 + 2(v, w)) + 4v^2w^2.
\end{aligned} \tag{B.35}$$

5. Desenvolvimentos Suplementares

a) Ações Efetivas

Nesta seção, calcularemos com mais detalhe as ações efetivas do fóton. Por conveniência é melhor começar pelo caso CPT-par. A contribuição que recebe nossa ação é dada pelo seguinte bilinear:

$$S = \bar{Z}(NM\bar{N})Z,$$

onde :

$$\begin{aligned}
N &= I^{(1)} + iI^{(2)}\gamma_5 + iI_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} = R + iI_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}, \\
\bar{N} &= I^{(1)} + iI^{(2)}\gamma_5 - iI_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} = R - iI_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}, \\
M &= A + B\gamma_5 + v_\theta\gamma^\theta + \omega_\theta\gamma^\theta\gamma_5,
\end{aligned}$$

com $I^{(1)}, I^{(2)}, I_{\mu\nu}, A, v_\theta, \omega_\theta$ reais, B é imaginário puro, $I_{\mu\nu}$ é anti-simétrico e $\bar{Z} = (\zeta \ \bar{\zeta})^t$ um espinor de fundo constante. Além disto, lembremos a definição de nossos condensados fermiônicos:

$$\begin{aligned}
\Theta &= \bar{Z}Z, \\
\tau &= \bar{Z}\gamma_5Z, \\
C^\theta &= \bar{Z}\gamma^\theta\gamma_5Z.
\end{aligned}$$

Vamos trabalhar a seguintes expressões particulares:

Bilinear 1:

$$\begin{aligned}\bar{Z}\Sigma^{\mu\nu}\gamma^\theta\Sigma^{\alpha\beta}Z &= \frac{i}{8}\left(\epsilon^{\beta\mu\nu\rho}C_\rho\eta^{\theta\alpha} - \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho}C_\rho\eta^{\theta\beta} + \epsilon^{\theta\alpha\beta\nu}C^\mu - \epsilon^{\theta\alpha\beta\mu}C^\nu\right) + \\ &\quad \frac{i}{8}\left(\epsilon^{\mu\alpha\beta\rho}C_\rho\eta^{\theta\nu} - \epsilon^{\nu\alpha\beta\rho}C_\rho\eta^{\theta\mu} + \epsilon^{\theta\mu\nu\alpha}C^\beta - \epsilon^{\theta\mu\nu\beta}C^\alpha\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{\mu\nu}I_{\alpha\beta}(\bar{Z}\Sigma^{\mu\nu}\gamma^\theta\Sigma^{\alpha\beta}Z) &= \frac{i}{8}\left(\epsilon^{\beta\mu\nu\rho}C_\rho\eta^{\theta\alpha} - \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho}C_\rho\eta^{\theta\beta} + \epsilon^{\theta\alpha\beta\nu}C^\mu - \epsilon^{\theta\alpha\beta\mu}C^\nu\right)I_{\mu\nu}I_{\alpha\beta} + \\ &\quad \frac{i}{8}\left(\epsilon^{\mu\alpha\beta\rho}C_\rho\eta^{\theta\nu} - \epsilon^{\nu\alpha\beta\rho}C_\rho\eta^{\theta\mu} + \epsilon^{\theta\mu\nu\alpha}C^\beta - \epsilon^{\theta\mu\nu\beta}C^\alpha\right)I_{\mu\nu}I_{\alpha\beta} \\ &= \frac{i}{4}\left[\left(\epsilon^{\mu\alpha\beta\rho}C_\rho\eta^{\theta\nu} + \epsilon^{\beta\mu\nu\rho}C_\rho\eta^{\theta\alpha}\right)I_{\mu\nu}I_{\alpha\beta} + \left(\epsilon^{\theta\alpha\beta\nu}C^\mu + \epsilon^{\theta\mu\nu\alpha}C^\beta\right)I_{\mu\nu}I_{\alpha\beta}\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Bilinear 2:

$$\begin{aligned}\bar{Z}\Sigma^{\mu\nu}\gamma^\theta\gamma_5\Sigma^{\alpha\beta}Z &= \frac{1}{4}(\eta^{\theta\nu}\eta^{\beta\mu} - \eta^{\theta\mu}\eta^{\beta\nu})C^\alpha + \frac{1}{4}(\eta^{\theta\mu}\eta^{\alpha\nu} - \eta^{\theta\nu}\eta^{\alpha\mu})C^\beta + \\ &\quad \frac{1}{4}(\eta^{\alpha\mu}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha})C^\theta + \frac{1}{4}(\eta^{\alpha\nu}\eta^{\beta\theta} - \eta^{\nu\beta}\eta^{\theta\alpha})C^\mu + \\ &\quad \frac{1}{4}(\eta^{\theta\alpha}\eta^{\mu\beta} - \eta^{\theta\beta}\eta^{\alpha\mu})C^\nu,\end{aligned}$$

$$I_{\mu\nu}I_{\alpha\beta}(\bar{Z}\Sigma^{\mu\nu}\gamma^\theta\gamma_5\Sigma^{\alpha\beta}Z) = 2I^{\theta\mu}I_{\mu\alpha}C^\alpha + \frac{1}{2}C^\theta I_{\mu\nu}I^{\mu\nu}.$$

Também:

$$\begin{aligned}\bar{Z}(\Sigma^{\mu\nu}\Sigma^{\alpha\beta})Z &= \frac{\theta}{4}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta}) - \frac{i}{4}\tau\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}, \\ \bar{Z}(\Sigma^{\mu\nu}\Sigma^{\alpha\beta}\gamma_5)Z &= \frac{\tau}{4}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta}) - \frac{i}{4}\theta\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}, \\ l.c.(\bar{Z}\gamma Z) &= 0, \\ l.c.(\bar{Z}\Sigma Z) &= 0, \\ l.c.(\bar{Z}\Sigma\gamma_5 Z) &= 0.\end{aligned}$$

onde *l.c.* refere-se a combinações lineares.

Voltando à nossa ação, podemos calcular o produto, organizando-o da forma:

$$\begin{aligned}\bar{Z}(NM\bar{N})Z &= \bar{Z}(R + iI_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu})M(R - iI_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu})Z \\ &= \bar{Z}(RMR)Z + I_{\mu\nu}I_{\alpha\beta}\bar{Z}(\Sigma^{\mu\nu}M\Sigma^{\alpha\beta})Z + \\ &\quad iI_{\mu\nu}\bar{Z}(\Sigma^{\mu\nu}MR)Z - iI_{\mu\nu}\bar{Z}(RM\Sigma^{\mu\nu})Z.\end{aligned}$$

1º termo:

$$\begin{aligned}\bar{Z}(RMR)Z &= \bar{Z}(I^{(1)} + iI^{(2)}\gamma_5)(A + B\gamma_5 + v_\theta\gamma^\theta + \omega_\theta\gamma^\theta\gamma_5)(I^{(1)} + iI^{(2)}\gamma_5)Z \\ &= (I^{(1)}I^{(1)} - I^{(2)}I^{(2)})(A\theta + B\tau) + 2iI^{(1)}I^{(2)}(A\tau + B\theta) + \\ &\quad (I^{(1)}I^{(1)} + I^{(2)}I^{(2)})\omega_\theta C^\theta.\end{aligned}$$

2º termo:

$$\begin{aligned}I_{\mu\nu}I_{\alpha\beta}\bar{Z}(\Sigma^{\mu\nu}M\Sigma^{\alpha\beta})Z &= AI_{\mu\nu}I_{\alpha\beta}\bar{Z}(\Sigma^{\mu\nu}\Sigma^{\alpha\beta})Z + BI_{\mu\nu}I_{\alpha\beta}\bar{Z}(\Sigma^{\mu\nu}\Sigma^{\alpha\beta}\gamma_5)Z + \\ &\quad v_\theta I_{\mu\nu}I_{\alpha\beta}\bar{Z}(\Sigma^{\mu\nu}\gamma^\theta\Sigma^{\alpha\beta})Z + \omega_\theta I_{\mu\nu}I_{\alpha\beta}\bar{Z}(\Sigma^{\mu\nu}\gamma^\theta\gamma_5\Sigma^{\alpha\beta})Z \\ &= \frac{1}{2}I_{\mu\nu}I^{\mu\nu}(A\theta + B\tau) - \frac{i}{2}I_{\mu\nu}\tilde{I}^{\mu\nu}(A\tau + B\theta) + \\ &\quad 2\omega_\theta I^{\theta\mu}I_{\mu\alpha}C^\alpha + \frac{1}{2}\omega_\theta C^\theta I_{\mu\nu}I^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

3º termo:

$$\begin{aligned}iI_{\mu\nu}\bar{Z}(\Sigma^{\mu\nu}MR)Z &= iI_{\mu\nu}\bar{Z}\Sigma^{\mu\nu}(A + B\gamma_5 + v_\theta\gamma^\theta + \omega_\theta\gamma^\theta\gamma_5)(I^{(1)} + iI^{(2)}\gamma_5)Z \\ &= (iv_\theta I^{(1)} - \omega_\theta I^{(2)})I_{\mu\nu}(\bar{Z}\Sigma^{\mu\nu}\gamma^\theta Z) + \\ &\quad (i\omega_\theta I^{(1)} - v_\theta I^{(2)})I_{\mu\nu}(\bar{Z}\Sigma^{\mu\nu}\gamma^\theta\gamma_5 Z) + \\ &\quad l.c.(\bar{Z}\Sigma Z) + l.c.(\bar{Z}\Sigma\gamma_5 Z) \\ &= (iv_\theta I^{(1)} - \omega_\theta I^{(2)})\tilde{I}^{\theta\rho}C_\rho - i(i\omega_\theta I^{(1)} - v_\theta I^{(2)})I^{\theta\rho}C_\rho.\end{aligned}$$

4º termo:

$$\begin{aligned}
-iI_{\mu\nu}\bar{Z}(RM\Sigma^{\mu\nu})Z &= -iI_{\mu\nu}\bar{Z}(I^{(1)} + iI^{(2)}\gamma_5)(A + B\gamma_5 + v_\theta\gamma^\theta + \omega_\theta\gamma^\theta\gamma_5)\Sigma^{\mu\nu}Z \\
&= -(iv_\theta I^{(1)} + \omega_\theta I^{(2)})I_{\mu\nu}(\bar{Z}\gamma^\theta\Sigma^{\mu\nu}Z) \\
&\quad - (i\omega_\theta I^{(1)} + v_\theta I^{(2)})I_{\mu\nu}(\bar{Z}\gamma^\theta\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5Z) + \\
&\quad l.c.(\bar{Z}\Sigma Z) + l.c.(\bar{Z}\Sigma\gamma_5 Z) \\
&= -(iv_\theta I^{(1)} + \omega_\theta I^{(2)})\tilde{I}^{\theta\rho}C_\rho - i(i\omega_\theta I^{(1)} + v_\theta I^{(2)})I^{\theta\rho}C_\rho.
\end{aligned}$$

Portanto, temos:

$$\begin{aligned}
S = \bar{Z}(NM\bar{N})Z &= (I^{(1)}I^{(1)} - I^{(2)}I^{(2)} + \frac{1}{2}I_{\mu\nu}I^{\mu\nu})(A\theta + B\tau) + \\
&\quad i(2I^{(1)}I^{(2)} - \frac{1}{2}I_{\mu\nu}\tilde{I}^{\mu\nu})(A\tau + B\theta) + \\
&\quad (I^{(1)}I^{(1)} + I^{(2)}I^{(2)} + \frac{1}{2}I_{\mu\nu}I^{\mu\nu})\omega_\theta C^\theta + \\
&\quad 2I^{(1)}I^{\theta\rho}\omega_\theta C_\rho - 2I^{(2)}\tilde{I}^{\theta\rho}\omega_\theta C_\rho.
\end{aligned}$$

Agora que derivamos as formas de vários bilineares importantes, podemos calcular facilmente a contribuição para a ação do caso CPT-ímpar, dada por:

$$S = F_{\mu\nu}(\bar{\Psi}\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5 J^{-1}\Sigma^{\alpha\beta}\gamma_5\Psi)F_{\alpha\beta}, \quad (\text{B.36})$$

$$\begin{aligned}
S &= F_{\mu\nu}(\bar{\Psi}\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5 J^{-1}\Sigma^{\alpha\beta}\gamma_5\Psi)F_{\alpha\beta} \\
&= (\bar{\Psi}\Sigma^{\mu\nu}\Sigma^{\alpha\beta}\Psi)F_{\mu\nu}AF_{\alpha\beta} + (\bar{\Psi}\Sigma^{\mu\nu}\Sigma^{\alpha\beta}\gamma_5\Psi)F_{\mu\nu}BF_{\alpha\beta} + \\
&\quad (\bar{\Psi}\Sigma^{\alpha\beta}\gamma^\theta\Sigma^{\mu\nu}\Psi)F_{\alpha\beta}R_\theta F_{\mu\nu} + (\bar{\Psi}\Sigma^{\alpha\beta}\gamma^\theta\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\Psi)F_{\alpha\beta}S_\theta F_{\mu\nu} \\
&\quad (\bar{\Psi}\Sigma^{\rho\lambda}\Sigma^{\mu\nu}\Sigma^{\alpha\beta}\Psi)F_{\rho\lambda}l_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Os quatro primeiros termos contêm bilineares que já foram calculados no caso anterior; o único novo corresponde ao quinto termo e envolve o produto de 3 matrizes Σ ;

3 bilinear

$$\begin{aligned}
(\bar{\Psi}\Sigma^{\kappa\lambda}\Sigma^{\mu\nu}\Sigma^{\alpha\beta}\Psi) &= \frac{i}{2}\eta^{\nu\alpha}\bar{\Psi}\Sigma^{\kappa\lambda}\Sigma^{\mu\beta}\Psi + (\mu \leftrightarrow \nu, \alpha \leftrightarrow \beta) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&\quad - (\alpha \leftrightarrow \beta) + l.c.(\bar{\Psi}\Sigma\Psi) + l.c.(\bar{\Psi}\Sigma\gamma_5\Psi) \\
&= \frac{i}{8}\Theta(\eta^{\nu\alpha}\eta^{\kappa\mu}\eta^{\lambda\beta} - \eta^{\nu\alpha}\eta^{\kappa\beta}\eta^{\lambda\mu}) + \frac{\tau}{8}\eta^{\nu\alpha}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\beta} + \\
&\quad (\mu \leftrightarrow \nu, \alpha \leftrightarrow \beta) - (\alpha \leftrightarrow \beta) - (\mu \leftrightarrow \nu), \quad (B.38)
\end{aligned}$$

portanto:

$$\begin{aligned}
F_{\kappa\lambda}(\bar{\Psi}\Sigma^{\rho\lambda}\Sigma^{\mu\nu}\Sigma^{\alpha\beta}\Psi)F_{\alpha\beta} &= \frac{\tau}{4}F_{\kappa\lambda}F_{\beta}^{\nu}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\beta} - \frac{\tau}{4}F_{\kappa\lambda}F_{\beta}^{\mu}\epsilon^{\kappa\lambda\nu\beta} \\
F_{\kappa\lambda}(\bar{\Psi}\Sigma^{\rho\lambda}\Sigma^{\mu\nu}\Sigma^{\alpha\beta}\Psi)l_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} &= \frac{\tau}{2}F_{\kappa\lambda}l_{\mu\nu}F_{\beta}^{\nu}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\beta} \quad (B.39)
\end{aligned}$$

b) Cálculo de β^2

No Capítulo 4, definimos a grandeza

$$\begin{aligned}
\beta &= 10\sqrt{2}Re(\partial_{\mu}S)(\bar{Z}\partial^{\mu}\Lambda) - 8\sqrt{2}iRe(\partial_{\mu}S)(\bar{Z}\Sigma^{\mu\nu}\partial_{\nu}\Lambda) + \\
&\quad 8\sqrt{2}Im(\partial_{\mu}S)(\bar{Z}\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\partial_{\nu}\Lambda) + 10\sqrt{2}iIm(\partial_{\mu}S)(\bar{Z}\gamma_5\partial^{\mu}\Lambda) + \\
&\quad 16m_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + 16m_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (B.40)
\end{aligned}$$

De modo que, ao eliminar o campo auxiliar, nossa ação recebia uma contribuição proporcional a β^2 . Como se pode observar, o cálculo desta quantidade passa por produtos combinados dos termos t_n , os quais mediante rearranjos de Fierz produzirão termos proporcionais aos condensados fermiônicos na ação.

Com o propósito de ilustrar isto, definamos o seguinte conjunto de matrizes:

$$\Gamma_{(n)}^{\mu\nu} = \{I_{4\times 4}\eta^{\mu\nu}, \gamma_5\eta^{\mu\nu}, \Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\} \quad , \quad n = 1\dots 4 \quad (B.41)$$

Desta forma, qualquer termo se pode escrever como $t_n = v_{\mu}\bar{Z}\Sigma_{(n)}^{\mu\nu}\partial_{\nu}\Lambda$. Logo, o

produto de dois termos é dado por:

$$\begin{aligned}
t_n \times t_m &= \int d^4x \ v_\mu w_\alpha \left(\bar{Z} \Gamma_{(n)}^{\mu\nu} \partial_\nu \Lambda \right) \left(\bar{Z} \Gamma_{(m)}^{\alpha\beta} \partial_\beta \Lambda \right) \\
&= (-1)^{(s+1)} v_\mu w_\alpha \int d^4x \left[\bar{\Lambda} \Gamma_{(n)}^{\mu\nu} \left(Z \bar{Z} \right) \Gamma_{(m)}^{\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\beta \Lambda \right] \\
&\quad \text{(utilizando [B.20] } \longrightarrow \text{)} \\
&= \frac{(-1)^{(s+2)}}{4} v_\mu w_\alpha \Theta \int d^4x \left[\bar{\Lambda} \Gamma_{(n)}^{\mu\nu} \Gamma_{(m)}^{\alpha\beta} \square \omega_{\nu\beta} \Lambda \right] + \\
&\quad \frac{(-1)^{(s+2)}}{4} v_\mu w_\alpha \tau \int d^4x \left[\bar{\Lambda} \Gamma_{(n)}^{\mu\nu} \gamma_5 \Gamma_{(m)}^{\alpha\beta} \square \omega_{\nu\beta} \Lambda \right] + \\
&\quad \frac{(-1)^{(s+1)}}{4} v_\mu w_\alpha C_\kappa \int d^4x \left[\bar{\Lambda} \Gamma_{(n)}^{\mu\nu} \gamma^\kappa \gamma_5 \Gamma_{(m)}^{\alpha\beta} \square \omega_{\nu\beta} \Lambda \right], \quad (\text{B.42})
\end{aligned}$$

onde $s = \{0, 1\}$ e depende do sinal que se obtém após de intercambiar a ordem dos espinores Z e Λ no primeiro parêntese de (B.42). Por outro lado as integrais dos colchetes podem ser simplificadas analisando um pouco integrais do tipo:

$$\begin{aligned}
I &= \int d^4x \ (\bar{\Phi} \gamma^\alpha \partial_\mu \partial_\nu \Phi) = \left[\text{T. Superfície} \right] + \int d^4x \ (\partial_\mu \partial_\nu \bar{\Phi} \gamma^\alpha \Phi), \\
&\quad \text{mas pela propriedade dos espinores :} \\
&= \left[\text{T. Superfície} \right] - \int d^4x \ (\bar{\Phi} \gamma^\alpha \partial_\mu \partial_\nu \Phi).
\end{aligned}$$

Logo, a integral I é nula. Da mesma, formas pode-se mostrar:

$$\begin{aligned}
\int d^4x \ (\bar{\Phi} \Sigma^{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\nu \Phi) &= 0 \\
\int d^4x \ (\bar{\Phi} \Sigma^{\alpha\beta} \gamma_5 \partial_\mu \partial_\nu \Phi) &= 0 \quad (\text{B.43})
\end{aligned}$$

Assim, no momento de fazer os nossos cálculos só precisamos levar em conta termos proporcionais às matrizes 1 , γ_5 e $\gamma_\mu \gamma_5$, que aparecerão na expansão do produto das $\Gamma_{(n)}^{\mu\nu}$.

Exemplo

Se $n = 3$ e $n = 4$ temos que $t_3 t_4$ reduz-se:

$$\begin{aligned}
t_3 t_4 &= \frac{1}{4} v_\mu w_\alpha C_\kappa \int d^4 x \left[\bar{\Lambda} \Sigma^{\mu\nu} \gamma^\kappa (\gamma_5)^2 \eta^{\alpha\beta} \square \omega_{\nu\beta} \Lambda \right] \\
&= \frac{1}{8} v_\mu w^\beta C_\kappa \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \int d^4 x \left[\bar{\Lambda} \gamma^\kappa \gamma_5 \square \omega_{\nu\beta} \Lambda \right] \\
&= -16 \text{Im}(\partial_\mu S) \text{Re}(\partial^\beta S) C_\kappa \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \int d^4 x \left[\bar{\Lambda} \gamma^\kappa \gamma_5 \square \omega_{\nu\beta} \Lambda \right].
\end{aligned}$$

Referências

- [1] Alexandre Arbey, Marco Battaglia, Farvah Mahmoudi, arXiv:1504.05091
- [2] Samuel, S., and Kostelcký V.A., Phys. Rev.,D39, 683 (1989).
- [3] J. M. Carmona, J. L. Cortes, J. Gamboa and F. Mendez Phys. Lett. B565, 222 (2003). S. M. Carrol et al. Phys. Rev. Lett. 87, 141601 (2001).
- [4] C.P. Burgess, J.M. Cline, E. Filotas, J. Matias, and G.D. Moore. Journal of High Energy Physics 3 3535, (2002).
- [5] Robertson, H.P., Rev. Mod. Phys., 21, 378 (1949). Mansouri, R., and Sexl, R. U., Gen. Rel. and Grav., 8, 497 (1977). MacArthur D.W., Phys. Rev., A33, 1(1986).
- [6] Amelino-Camelia, G., New. J. Phys., 6, 188 (2004). Konopka, T.J., and Major, S.A., New. J. Phys., 4, 57 (2002).
- [7] Lightman, A.P., and Lee, D.L., Phys. Rev., D8, 364 (1973). Horvath J., Logiúdice, E.A., Riveros, C.,and Vucetich H., Phys. Rev., D38, 1754 (1988).
- [8] Colladay, D., and Kostelcký V.A., Phys. Rev., D55, 6760-6774 (1997). Colladay, D., and Kostelcký V.A., Phys. Rev., D58, 116002 (1998)
- [9] V. A. Kostelecký and N. Russell, “Data Tables for Lorentz and CPT Violation,” Rev. Mod. Phys. 83, 11 (2011).
- [10] Q.G. Bailey and V.A. Kostelecký, Phys. Rev. D 74, 045001 (2006).

- [11] V.A. Kostelecký, N. Russell, and J.D. Tasson, *Phys. Rev. Lett.* 100, 111102 (2008).
- [12] V.A. Kostelecký and J.D. Tasson, *Phys. Rev. Lett.* 102, 010402 (2009).
- [13] M.M. Ferreira Jr and F. M. O. Moucherek, *Int. J. Mod. Phys. A* 21, 6211 (2006); *Nucl. Phys. A* 790, 635 (2007); S. Chen, B. Wang, and R. Su, *Class. Quant.Grav.* 23, 7581,(2006); O.G. Kharlanov and V. Ch. Zhukovsky, *J. Math. Phys.*48, 092302 (2007), M. Frank, I. Turan, I. Yurdusen,hep-th 07094276.
- [14] V.A. Kostelecky and C. D. Lane, *J. Math. Phys.* 40, 6245 (1999); R. Lehnert, *J. Math. Phys.* 45, 3399 (2004).
- [15] H. Belich, E. O. Silva, M. M. Ferreira Jr. and M. T. D. Orlando, *Phys. Rev. D* 83, 125025 (2011); K. Bakke and H. Belich, *Eur. Phys. J. Plus* 127, 102 (2012); K. Bakke, H. Belich and E. O. Silva, *Ann. Phys. (Berlin)* 523, 910 (2011); K. Bakke, et al., *J. Math. Phys.* 52, 063505 (2011).
- [16] R. Casana et al.,*Phys. Rev. D* 78 , 105014 (2008) , R. Casana et al.,*Phys. Rev. D*78 , 025030(2008), R. Casana et al.,*Phys. Rev. D*80 , 125040(2009), R. Casana et al., *Phys. Rev. D*80 , 085026(2009), R. Casana et al., *Eur. Phys. J. C* 62, 573-578, (2009), A. G. Lima et al.; *Eur. Phys. J. Plus*, 128, 154-162, (2013), C. H. Coronado Villalobos, et al., *Eur. Phys. J. C.* 74, 27991, (2014); C. A. Hernaski, H. Belich, ,*Phys. Rev. D*, **89**, 104027, (2014).
- [17] H. Muller, C. Braxmaier, S. Herrmann, and A. Peters, *Phys. Rev. D* 67, 056006 (2003); H. Müller, A. Saenz, A. Peters, and C. Lämmerzahl, *Phys. Rev. D* 68, 116006 (2003); H. Müller, *Phys. Rev. D* 71, 045004 (2005); N. Russell, *Phys. Scripta* 72, C38 (2005).
- [18] D. F. Phillips, M. A. Humphrey, E. M. Mattison, R. E. Stoner, R. F C. Vessot, R. L. Walsworth, *Phys.Rev. D*63, 111101 (2001); D. Bear, R.E. Stoner, R.L. Walsworth, V. Alan Kostelecky, Charles D. Lane, *Phys.Rev.*

- Lett. 85, 5038 (2000); Erratum-ibid. 89 (2002) 209902; M.A. Humphrey, D.F. Phillips, R.L. Walsworth, Phys. Rev. A 68, 063807 (2003).
- [19] D. Colladay and P. MacDonald, Phys.Rev. D83 (2011) 025021; M. S. Berger and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D 65, 091701(2002); C.F. Farias, U., A.C. Lehum, J.R. Nascimento and A.Yu. Petrov, Phys.Rev. D86 (2012) 065035; A. Katz and Y. Shadmi Phys.Rev. D74 (2006) 115021; J. A. Helay el-Neto, H. Belich, G.S. Dias, F.J.L. Leal and W. Spalenza, Proceedings of Science, PoS - ICFI2010 (2010) 032.
- [20] S. Groot Nibbelink and M. Pospelov, Phys. Rev. Lett. 94, 081601 (2005).
- [21] P. A. Bolokhov, S. Goot Nibbelink, and M. Pospelov Phys. Rev. D 72, 015013.
- [22] D. Redigolo, Phys.Rev.D85 (2012) 085009.
- [23] C. F. Farias, A. C. Lehum, J. R. Nascimento, and A. Yu. Petrov, Phys. Rev. D 86, 065035, (2012), M. Gomes, A. C. Lehum, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, and A. J. da Silva, Phys. Rev. D87, 027701, (2013), A. C. Lehum, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, and A. J. da Silva, Phys. Rev. D 88, 045022, (2013), Gomes, J.R. Nascimento, A. Yu. Petrov, A.J. da Silva.
- [24] J.L. Chkareuli, EPJ C74 (2014) 2906, arxvi:1305.4470[hep-th].
- [25] M. Pospelov and C. Tamarit, JHEP 01(2014) 048
- [26] H.Belich , J.L. Boldo, L.P. Colatto, J.A. Helayel-Neto, A.L.M.A. Nogueira, , Phys. Rev. D 68, 065030 (2003)
- [27] H. Belich, F. J. L. Leal, H. L. C. Louzada and M. T. D. Orlando, Phys. Rev. D 86, 125037 (2012).
- [28] E. T. Tomboulis, Phys. Rev. D85 (2012) 024042.
- [29] Mattingly D. 2005 Living Rev. Rel. 8 5, Liberati S. 2013 Class.Quant.Grav. 30 133001

- [30] S. Chern, J. Simons, *Ann. Math.* 99 (1974) 48.
- [31] S.M. Carroll, G.B. Field, R. Jackiw, *Phys. Rev. D* 41 (1990)
- [32] A.H. Gomes, J.M. Fonseca, W.A. Moura-Melo, A.R. Pereira, *JHEP* 05, 104 (2010).
- [33] R. Lehnert and R. Potting, *Phys. Rev. Lett.* 93, 110402 (2004); R. Lehnert and R. Potting, *Phys. Rev. D* 70, 125010 (2004); B. Altschul, *Phys. Rev. D* 75, 105003 (2007); C. Kaufhold and F.R. Klinkhamer, *Nucl. Phys. B* 734, 1 (2006).
- [34] M. Frank and I. Turan, *Phys. Rev. D* 74, 033016 (2006); O.G. Kharlanov, V.Ch. Zhukovsky, *Phys. Rev. D* 81, 025015 (2010).
- [35] H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayel-Neto, M.T.D. Orlando, *Phys. Rev. D* 67,125011 (2003); Erratum-ibid., *Phys. Rev. D* 69, 109903 (2004)
- [36] V.A. Kostelecky, M.Mewes, *Phys.Rev.Lett.* 99, 011601 (2007); V. A. Kostelecky and M. Mewes, *Astrophys. J. Lett.* 689, L1 (2008); J.-Q. Xia, Hong Li, X. Wang, X. Zhang, *Astron.Astrophys.* 483, 715 (2008); J.-Q. Xia, H. Li, X. Zhang, *Phys.Lett. B* 687, 129(2010); B. Feng, M. Li, J.-Q. Xia, X. Chen, X. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* 96, 221302 (2006); P. Cabella, P. Natoli, J. Silk, *Phys. Rev. D* 76, 123014 (2007).
- [37] A. P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo, J.A. Helayel-Neto, *Phys. Rev. D* 67, 085021 (2003); A.P. Baeta Scarpelli and J.A. Helayel-Neto, *Phys.Rev. D* 73, 105020 (2006).
- [38] C. Adam and F. R. Klinkhamer, *Nucl. Phys. B* 607, 247 (2001); C. Adam and F. R. Klinkhamer, *Nucl. Phys. B* 657, 214 (2003).
- [39] R. Jackiw and V. A. Kosteleck'y, *Phys. Rev. Lett.* 82, 3572 (1999); J. M. Chung and B. K. Chung *Phys. Rev. D* 63, 105015 (2001); J.M. Chung, *Phys.Rev. D* 60, 127901 (1999); G. Bonneau, *Nucl.Phys. B* 593, 398 (2001);

M. Perez-Victoria, Phys. Rev. Lett. 83, 2518 (1999); M. Perez-Victoria, J. High. Energy Phys. 0104, (2001) 032; O.A. Battistel and G. Dallabona, Nucl. Phys. B 610, 316 (2001); O.A. Battistel and G. Dallabona, J. Phys. G 28, L23 (2002); J. Phys. G 27, L53 (2001); A. P. B. Scarpelli, M. Sampaio, M. C. Nemes, and B. Hiller, Phys. Rev. D 64, 046013 (2001); T. Mariz, J.R. Nascimento, E. Passos, R.F. Ribeiro and F.A. Brito, J. High. Energy Phys. 0510 (2005) 019; J. R. Nascimento, E. Passos, A. Yu. Petrov, F. A. Brito, J. High. Energy Phys. 0706, (2007) 016; B. Altschul, Phys. Rev. D 70, 101701 (2004); A.P.B. Scarpelli, M. Sampaio, M.C. Nemes, B. Hiller, Eur. Phys. J. C 56, 571 (2008); F.A. Brito, J.R. Nascimento, E. Passos, A.Yu. Petrov, Phys. Lett. B 664, 112 (2008); Oswaldo M. Del Cima, J. M. Fonseca, D.H.T. Franco, O. Piguet, Phys. Lett. B 688, 258 (2010); F.A. Brito, L.S. Grigorio, M.S. Guimaraes, E. Passos, C. Wotzasek, Phys.Rev. D 78, 125023 (2008).

- [40] V. A. Kostelecký, M. Mewes, Phys.Rev.D 66 056005 (2002) ;
- [41] G. Betschart, E. Kant and F.R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B, 815 (2009)
- [42] V. A. Kostelecký, M. Mewes, Phys.Rev. Lett. 97 140401 (2006)
- [43] G. Saathoff et al., Phys. Rev. Lett. 91, 190403 (2003); M.E. Tobar, P. Wolf, A. Fowler, and J.G. Hartnett, Phys. Rev. D 71, 025004 (2005); M. Hohensee et al., Phys. Rev. D 75, 049902 (2007).
- [44] B. Odom, D. Hanneke, B. D’Urso, and G. Gabrielse, Phys. Rev. Lett. 97, 030801 (2006); G. Gabrielse et al., Phys. Rev. Lett. 97, 030802 (2006); 99, 039902(E) (2007); C.D. Carone, M. Sher, and M. Vanderhaeghen, Phys. Rev. D 74, 077901 (2006)
- [45] F.R. Klinkhamer, M. Risse, Phys. Rev. D 77 (2008) 016002 ; F.R. Klinkhamer, M. Risse Phys. Rev. D 77 (2008) 117901(A); F.R. Klinkhamer, M. Schreck, Phys. Rev. D 78 (2008)

- [46] R. Casana, M. M. Ferreira, A. R. Gomes, and F. E. P. dos Santos, Phys. Rev. D 82, 125006
- [47] M.S. Berger, V. Alan Kostelecky, Phys.Rev.D65 091701,2002
- [48] M. S. Berger Phys. Rev. D 68, 115005
- [49] H. Belich, J. L. Boldo, L. P. Colatto, J.A. Helayel-Neto, A.L.M.A. Nogueira Phys.Rev. D68 (2003) 065030
- [50] H. Belich, F. J. L. Leal, H. L. C. Louzada and M. T. D. Orlando, Phys. Rev. D 86, 125037 (2012).
- [51] Fernando J. L. Leal, *Aspectos Particulares do Setor Fermiônico de Modelos Supersimétricos em Presença de Violação da Simetria de Lorentz*, Tese de Doutorado
- [52] H. Belich, L. D. Bernald, P. Gaete and J.A. Helayël-Neto , Eur. Phys. J. C 73, 2632 (2013).
- [53] H. Belich, L. D. Bernald, P. Gaete, J.A. Helayël-Neto and F.J.L. Leal, Eur. Phys. J. C 75, 219 (2015).
- [54] P. Dirac, Can. J. Phys. 33, 650 (1955).
- [55] P. Gaete, Z. Phys. C 76, 355 (1997).
- [56] V. Fock: Sov. Phys. 12 (1937) 404; J. Schwinger: Phys. Rev. 82 (1952) 684
- [57] P. A. M. Dirac , Lectures on Quantum Mechanics
- [58] L.V. Prokhorov , S.V. Shavanov , International Journal of Modern Physics A, Vol 7, 31 (1992) 7815-7840
- [59] P. Gaete and E. Spallucci, Phys. Rev. D 77, 027702 (2008).
- [60] P. Gaete and E. Spallucci, J. Phys. A: Math. Theor. 41, 185401 (2008).

- [61] P. Gaete and I. Schmidt, Phys. Rev. D 61, 125002 (2000).
- [62] P. Gaete, Phys. Rev. D 59, 127702 (1999).
- [63] P. Gaete and E. I. Guendelman Mod. Phys. Lett. A 20, 319 (2005).
- [64] P. Gaete and J. A. Helayel-Neto, Phys. Lett. B 683 , 211 (2010).
- [65] V.M. Red'kov, A.A. Bogush, N.G. Tokarevskaya; arXiv:0709.3574
- [66] Harald J. W. Muller-Kirsten, Armin Wiedemann, Introduction to Supersymmetry.
- [67] H. K. Dreiner, H. E. Haber, S. P. Martin, Phys. Rept. 494:1-196, 2010.